Besvarelser til Calculus
Ordinær eksamen - Efterår - 8. Januar 2016

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En partikel bevæger sig langs en kurve i rummet. Partiklens koordinater til tiden t er givet ved:

$$\begin{aligned} x &= 4t + 1, \\ y &= \cos(3t), \\ z &= \sin(3t). \end{aligned}$$

a. Bestem kurvens buelængde fra $t = 0$ til $t = 4$.

Vi vil anvende formlen

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt,$$

hvor a og b er de givne grænser 0 og 4. Før vi kan anvende formlen skal vi altså finde de afledede. Vi får blandt andet ved brug af kædereglen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 4, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -3\sin(3t), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = 3\cos(3t).$$

Indsættes dette fås:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{4^2 + (-3\sin(3t))^2 + (3\cos(3t))^2} dt &= \int_0^4 \sqrt{16 + 9\sin^2(3t) + 9\cos^2(3t)} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{16 + 9\left(\sin^2(3t) + \cos^2(3t)\right)} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{16+9} dt = \int_0^4 5 dt = [5x]_0^4 = 20 \end{aligned}$$

Buelængden er altså 20 for kurven fra $t = 0$ til $t = 4$.

b. Find accelerationsvektoren for partiklen.

Vi skal blot finde de anden ordens afledede, og vi differentierer altså de afledte, vi fandt tidligere. Dermed har vi ved brug af kædereglen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -3 \cdot 3\cos(3t) = -9\cos(3t), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 3(-3\sin(3t)) = -9\sin(3t).$$

Accelerationsvektoren bliver derfor,

$$a = -9 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix},$$

hvor vi har sat -9 udenfor, da denne principielt ganges på alle indgange.

Opgave 2

Lad $f(x)$ være en funktion, der er tre gange differentiabel i $x = 0$. Taylorpolynomiet af grad 3 for $f(x)$ med udvikingspunkt $a = 0$ er

$$P_3(x) = 2 - 7x + x^3.$$

Bestem værdierne for $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$.

Svar:

Vi husker, at et Taylor-polynomium af grad 3 kan skrives ved formlen:

$$P_3(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3,$$

hvor andet = skyldes, at $a = 0$ i dette tilfælde. Vi kan altså principielt opstille 4 ligninger, da 2 svarer til leddet uden x'er, hvilket er $f(0)$. Altså er $f(0) = 2$. Ligeledes svarer $-7x$ til leddet, som indeholder ét og kun ét x. Dette er $f'(a)$, hvormed vi har, at $f'(a) = -7$. Dernæst ses det, at det generelle Taylorpolynomium af grad 3 indeholder leddet $\frac{f''(0)}{2}x^2$, men det ses, at der ikke indgår noget x^2 i det givne polynomium. Den eneste måde, hvorpå dette kan lade sig gøre, er, hvis $f''(0) = 0$, hvormed leddet altså er 0 og derved ikke indgår. Sidst ses den tredje afledede $\frac{f'''(0)}{6}x^3$ har et tilsvarende led i den givne funktion, nemlig x^3, hvilken har koefficienten 1 (1 "står foran/er ganget på x^3). Dermed må

$$\frac{f'''(0)}{6} = 1,$$

og ganges der med 6 på hver side i ovenstående ligning får vi, at $f'''(0) = 6$.

Opgave 3

a. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Vi opstiller først den karakteristiske ligning:

$$r^2 + 4r + 5 = 0.$$

Denne løser vi så ved brug af formlen for andengradsligninger. Vi får diskriminanten til

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 = (2i)^2.$$

Dermed bliver løsningen til karakterligningen:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{(2i)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Da den karakteristiske ligning har to komplekse rødder, så er den fuldstændige løsning til differentialligning på formen:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

hvor $\alpha = \Re[r]$ og $\beta = \Im[r]$, hvor der her vælges roden med den positive imaginærdel. Altså er $\alpha = -2$ og $\beta = 1$, dermed fås:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(t) + c_2 e^{-2t} \sin(t).$$

b. Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

I løsningen fra før kan vi benytte punktet $y(0) = 0$. Vi har da:

$$0 = y(0) = c_1 e^{-2 \cdot 0} \cos(0) + c_2 e^{-2 \cdot 0} \sin(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot 0 = c_1.$$

Altså er $c_1 = 0$. Dermed er

$$y(t) = 0 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) = c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Vi kan nu differentiere ovenstående for at finde $y'(t)$ ved brug af produktreglen:

$$\frac{\partial y}{\partial t} y(t) = y'(t) = c_2 e^{-2t} \cos(t) + -2 c_2 e^{-2t} \sin(t).$$

Vi kan nu anvende, at $y'(0) = 3$, hvilket giver:

$$3 = y'(0) = c_2 e^{-2 \cdot 0} \cos(0) - 2 c_2 e^{-2 \cdot 0} \sin(0) = c_2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 c_2 \cdot 1 \cdot 0 = c_2.$$

Altså er $c_2 = 3$, og løsningen bliver derved:

$$y(t) = 3 e^{-2t} \sin(t).$$

Opgave 4

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \frac{5x+3y-1}{x+y}.$$

a. Angiv definitionsmængden for f.

De eneste tidspuntker, hvor funktionen ikke er defineret er når $y = -x$, da nævneren så bliver 0. Definitionsmængden er altså alle punkter bortset fra disse. Vi har:

$$Dm(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y \neq -x\}.$$

b. Skitser niveaukurven givet ved $f(x,y) = 2$.

Vi skal altså betragte:

$$\frac{5x+3y-1}{x+y} = 2.$$

Ganges med (x+y) på begge sider, får vi:

$$5x + 3y - 1 = 2(x+y) = 2x + 2y.$$

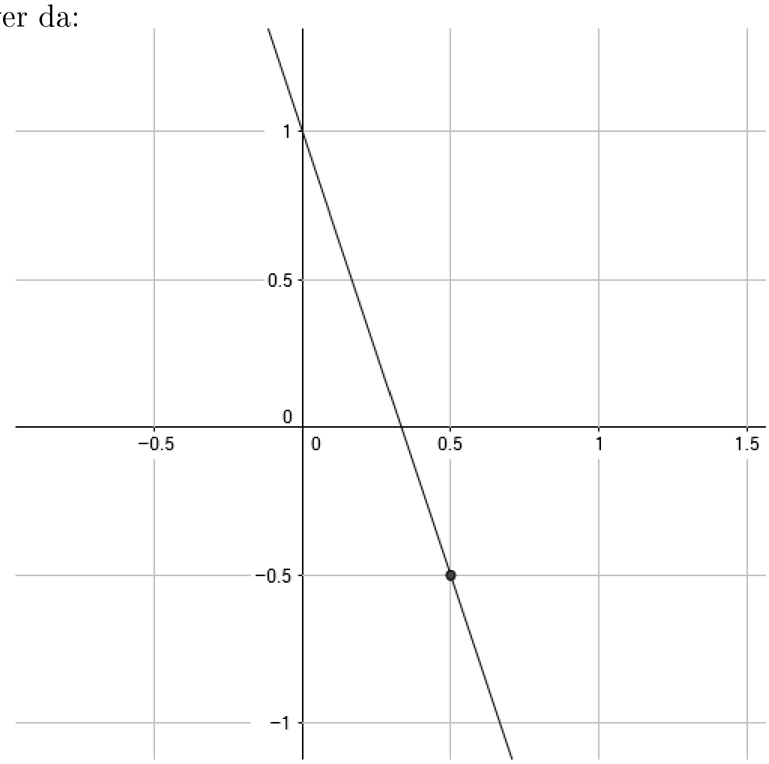
Trækkes $5x$ og $2y$ fra på hver side og læg 1 til. Så får vi:

$$y = -3x + 1.$$

Dette er en ret linje med skæring i 1 på y-aksen, og 1/3 på x-aksen. Lader vi $y = -x$ og indsætter dette i $y = -3x + 1$ får vi, at

$$-x = -3x + 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Da $y = -x$ ikke er medtaget, må punktet $(1/2, -1/2)$ altså ikke indgå i niveaukurven. Skitsen bliver da:



Opgave 5

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = xe^y.$$

Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y)$.

Vi skal blot differentiere f i forhold til både x og x. Vi får:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = e^y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = xe^y.$$

Dermed får vi

$$\nabla f(x,y) = [e^y,\ xe^y].$$

Beregn den retningsafledede af f i punktet $P = (1,0)$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Vi tjekker først, om $\mathbf{u}$ er en enhedsvektor, altså har længde 1:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}} = \sqrt{\mathbf{1}} = \mathbf{1}.$$

Altså er $\mathbf{u}$ Vi skal nu benytte formlen

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

Vi får altså:

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = [e^0,\ 1e^0] \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] = [1,1] \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

c. I hvilken retning er den retningsafledede i punktet $P = (1,0)$ størst? (Angiv en enhedsvektor). I hvilken retning er den retningsafledede i punktet P mindst?

Vi har en sætning, der siger, at den retningsafledede er størst i punktet, når

$$u = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}.$$

Ligeledes er den mindst, når

$$u = -\frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}.$$

Vi finder altså længden af $\nabla f(1,0) = [e^0, e^0] = [1,1]$ til:

$$|\nabla f(1,0)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Vi får altså den største retningsafledede til:

$$u = \frac{[1,1]}{\sqrt{2}} = \frac{[1,1]\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}[1,1]}{2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ligeledes for den mindste skal vi blot ændre fortegn på alle indgangene i vektoren, altså får vi:

$$u = \left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Opgave 6

Fladen $\mathscr{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) =$, hvor

$$F(x, y, z) = x^2 + \sin(xy) + 4z.$$

a. Godtgør, at punktet $P = (2, 0, -1)$ ligger på fladen $\mathscr{F}$.

Vi indsætter blot punktet P i funktionen F, og hvis det ligger på, skal det give 0 jævnfør defintionen for vores flade $\mathscr{F}$. Vi får:

$$F(2, 0, -1) = 2^2 + \sin(2 \cdot 0) + 4(-1) = 4 + 0 - 4 = 0.$$

Altså ligger punktet på fladen.

b. Bestem de partielle afledede $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, og $\frac{\partial F}{\partial z}$.

Ved brug af kædereglen opnås:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y\cos(xy), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\cos(xy), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4.$$

c. Find en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P = (2, 0, -1)$.

Vi indsætter først punktet i de afledede, så vi kender hældningen i hver retning:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = 2 \cdot 2 + 0\cos(2 \cdot 0) = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 2\cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot 1 = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 4.$$

Vi har nu tangentplanen givet ved:

$$4(x-2) + 2(y-0) + 4(z-(-1)) = 0.$$

Vi kan reducere udtrykket og få:

$$4x - 8 + 2y + 4z + 4 = -4x + 2y + 4z - 4 = 0.$$

Ved at lægge 4 til på begge sider og dernæst dividere med 2 kan vi opnå:

$$2x + y + 2z = 2.$$

Opgave 7

Lad $\mathscr{R}$ være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Skitser området $\mathscr{R}$.

Da $x^2 + y^2 = r^2$ er cirklens ligning for en cirkel med centrum i origo, $(0, 0)$, med radius r, kigger vi altså på en cirkel med centrum i origo med radius 2. Dog skal x være større end 0, hvilket betyder, at vi kun befinder os på højresiden af y-aksen. Altså er det en halvcirkel.

b. Beregn planintegralet

$$\int\int_{\mathscr{R}} e^{x^2+y^2} dA.$$

Ud fra det skitserede område kan vi opstille polære grænser for integralet, nemlig:

$$0 \leq r \leq 2, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dermed får vi for de polære koordinater (husk r ganges på i omskrivning fra kartesiske til polære koordinater):

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 re^{r^2} \, dr \, d\theta.$$

Vi bruger nu substitution. Lad $u = r^2$, dermed bliver

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r,$$

og vi får altså ved isolering af ∂r, at

$$\partial r = \frac{1}{2r} \partial u.$$

De nye koordinater i forhold til u bliver da:

$$u(0) = 0^2 = 0, \quad u(2) = 2^2 = 4.$$

Vores nye integralet bliver altså:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 re^u \frac{1}{2r} \, du \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 e^u \, du \, d\theta,$$

hvor 1/2 blot er flyttet udenfor, da denne er en konstant ganget på. Ved simpel integration får vi nu:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 e^u\,du\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[e^u\right]_{u=0}^4\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^4 - e^0\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^4 - 1\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[(e^4-1)\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((e^4-1)\frac{\pi}{2} - (e^4-1)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((e^4-1)\frac{\pi}{2} + (e^4-1)\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}2(e^4-1)\frac{\pi}{2} \\
&= (e^4-1)\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Opgave 8

Find de komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i.$$

Vi kan benytte den normale fremgangsmåde ved først at finde diskriminanten D:

$$D = (-3+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4-3i) = 9 - 1 - 6i - 16 + 12i = -8 + 6i.$$

Når vi skal finde rødderne kræver det, at vi kan finde kvadratroden af diskriminanten. Til at finde kvadratroden af et komplekst tal $z = a + bi$ bruges formlen:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right),$$

hvor $r = |z|$. Ved at sætte $a + bi = -8 + 6i = D$ har vi:

$$r = |D| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

Vi kan dermed indsætte i den førnævnte formel og få:

$$\sqrt{D} = \pm\left(\sqrt{\frac{10-8}{2}} + i\sqrt{\frac{10-(-8)}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{2}{2}} + i\sqrt{\frac{18}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{1} + i\sqrt{9}\right) = \pm(1+3i),$$

da fortegnet for b er et $+$ (dvs. $\mathrm{sgn}(b) = 1$). Vi kan nu bruge formlen:

$$z = \frac{-b\sqrt{D}}{2a},$$

hvorved vi får

$$z = \frac{-(-3+i) \pm (1+3i)}{2 \cdot 1} = \frac{3 - i \pm (1+3i)}{2} = \begin{cases} \frac{4+2i}{2} = 2 + i \\ \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i \end{cases}$$

Opgave 9

a. Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 1)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Da vi har, at

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

og

$$y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

er dette sandt.

b. Der gælder, at

$$e^{3\pi i} = -3.$$

Kort svar: Da der ikke er en realdel i potensen, kan venstre siden maks give 1.
Længere svar: Hvis $z = a + bi$, så er

$$e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Da vi har $z = 0 + 3\pi i$, får vi altså

$$e^{0+3\pi i} = e^{3\pi i} = e^0\left(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) = \left(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) = -1 + 0i = -1.$$

Altså er påstanden falsk!

c. Funktionen

$$2x^2 - 3y^2$$

antager et globalt maksimum i punktet $(0, 0)$.

Vi noterer først, at der er et led med x, som kun kan være positivt (eller 0) uanset værdien for x, og tilsvarende et led med y, som kun kan være negativt. Lader vi $y = 0$, så kan vi altså vælge $x \neq 0$, hvilket altså vil være større end det globale maksimum.