Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 3. Januar 2017

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En plan kurve er givet ved

$$\begin{aligned} x &= t^2, \\ y &= t^3 - t, \end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

a. Kurven skærer sig selv i et punkt, der har førstekoordinaten $x = 1$. Hvad er andenkoordinaten for dette skæringspunkt?

Da vi har fået givet $x = 1$, har vi ligningen $t^2 = 1$ fra opgaveteksten. Dermed er $t = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Indsættes disse to værdier for t i udtrykket for y fås:

$$y = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0, \qquad y = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0.$$

Dermed er andenkoordinaten 0 for dette skæringspunkt.

b. Hvad er krumningen af kurven for $t = 0$?

Vi skal bruge formlen

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}.$$

Derfor kræver det, at vi finder første- og andenordens afledede for x og y:

$$x'(t) = 2t, \qquad x''(t) = 2, \qquad y'(t) = 3t^2 - 1, \qquad y''(t) = 6t.$$

Evalueres alle funktionerne i $t = 0$ får vi:

$$x'(0) = 2 \cdot 0 = 0, \qquad x''(0) = 2, \qquad y'(0) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1, \qquad y''(0) = 6 \cdot 0 = 0.$$

Indsættes i formlen fås resultatet:

$$\kappa = \frac{|0 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}^3} = \frac{2}{\sqrt{1}^3} = \frac{2}{1} = 2.$$

Opgave 2

En kurve i rummet er givet ved

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}t^2, \\
y &= \frac{1}{3}(2t)^{\frac{3}{2}}, \\
z &= t,
\end{aligned}
$$

hvor paramteren t gennemløber de positive reelle tal.

a. Find det korrekte udtryk den afledede af y'.

Differentieres t^a fås $a \cdot t^{a-1}$. Ydermere skal det bemærkes, at der er en indre funktion, $2t$, og en ydre funktion, $()^{\frac{3}{2}}$, hvormed kædereglen skal benyttes. Vi får:

$$
y'(t) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}(2t)^{\frac{3}{2}-1} = (2t)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = (2t)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2t}
$$

b. Hvad er buelængden af kurven fra $t = 2$ til $t = 4$

Det generelle udtryk for buelængden af en kurve i rummet er givet ved

$$
\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.
$$

Vi har givet, at $a = 2$ og $b = 4$. Vi differentierer nu x og z med hensyn til t (y' har vi allerede udregnet), og får:

$$
x'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}t^{2-1} = t, \quad z'(t) = 1.
$$

Indsættes det i formlen fås:

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \sqrt{t^2 + (\sqrt{2t})^2 + 1^2}\, dt &= \int_2^4 \sqrt{t^2 + 2t + 1}\, dt \\
&= \int_2^4 \sqrt{(t+1)^2}\, dt \\
&= \int_2^4 t + 1\, dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_2^4 \\
&= \frac{1}{2}4^2 + 4 - (\frac{1}{2}2^2 + 2) \\
&= 8 + 4 - (2 + 2) \\
&= 8 + 4 - 4 \\
&= 8,
\end{aligned}
$$

hvor en kvadratsætning er anvendt mellem 2. og 3. udtryk.

Opgave 3

En funktion er defineret ved
$$f(x) = \ln(\cos x)$$
for $-\frac{\pi}{2} < x\frac{\pi}{2}$.

a. Hvad er differentialkvotienten $f'(x)$?

Funktionen består af den ydrefunktion $\ln(\cdot)$ og den indre funktion $\cos x$. Den afledede af $\ln(u)$ er $\frac{1}{u}$, når der differentieres i forhold til u, og den afledede af $\cos x$ er $-\sin x$. Kædereglen giver os:

$$f'(x) = \left(\frac{d}{du}\ln(u)\right)\left(\frac{d}{dx}\cos x\right) = \frac{1}{u}(-\sin x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\frac{sinx}{cosx} = -\tan x.$$

b. Hvad er andenordens Taylorpolynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $x = 0$.

Vi har den førsteordensafledede fra opgave a. Dette resultat kan vi blot differentiere, og da $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ har vi, at:

$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

Indsættes $x = 0$ i $f(x), f'(x)$ og $f''(x)$ får vi:

$$f(0) = \ln(\cos(0)) = \ln(1) = 0, \quad f'(0) = -\tan(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{1}{\cos^2 0} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Den generelle formel for et andenordens Taylorpolynomium med udviklingspunkt a:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2.$$

Da vi har, at $a = 0$ og kender funktionerne, får vi:

$$P_2(x) = 0 + 0\cdot(x-0) + \frac{1}{2}(-1)\cdot(x-0)^2 = -\frac{1}{2}x^2.$$

Opgave 4

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = (1-i)(2-3i) + 7i, \qquad z_2 = i(1+i).$$

a. Hvad er z_1 skrevet på standardform?

Vi skal blot gange parenteserne ud. Vi får:

$$z_1 = (1-i)(2-3i) + 7i = 1(2-3i) - i(2-3i) + 7i = 2 - 3i - 2i - 3 + 7i = -1 + 2i.$$

b. Hvad er z_2 skrevet på polær form?

Polær form for et komplekst tal ser ud på følgende måde:

$$z = r \cdot e^{\theta \cdot i},$$

hvor r er modulus af det komplekse tal, og θ er vinklen. Vi har, at

$$r = |i(1+i)| = |i| \cdot |1+i| = \sqrt{0^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

For at finde θ har vi to ligninger, som denne skal opfylde:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Da

$$i(1+i) = -1 + i \Rightarrow x = -1,\ y = 1,$$

har vi følgende:

$$-1 = \sqrt{2}\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1 = \sqrt{2}\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Det er kun $\theta = \frac{3\pi}{4}$ og $\theta = \frac{5\pi}{4}$, der opfylder første ligning (x). I forhold til anden ligning (y), er det kun $\theta = \frac{\pi}{4}$ og $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Da $\theta = \frac{3\pi}{4}$ er det eneste tal, der går igen, er dette vinklen. Dermed er svaret:

$$z_2 = \sqrt{2}e^{3\pi/4 \cdot i} = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}.$$

Opgave 5

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' + 4y' + 20y = 0.$$

a. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Vi opstiller og løser den karakteristiske ligning:

$$r^2 + 4r + 20 = 0.$$

Vi finder diskriminanten:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 16 - 80 = -64 = -8 \cdot 8 = (8i)^2.$$

Dermed bliver løsningen:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{(8i)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 8i}{2} = -2 \pm 4i.$$

Hvis løsningen til den karakteristiske ligning er et komplekst tal på formen $a + bi$, så er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt).$$

Vi har, at $a = -2$ og $b = 4$, hvorfor vi får løsningen:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(4t) + c_2 e^{-2t} \sin(4t).$$

b. Det oplyses, at funktionen $f(t) = \frac{1}{4}t$ er en løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' + 4y' + 20y = 1 + 5t.$$

Find den partikulære løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 20y = 1 + 5t + 5e^t.$$

Et gæt på den partielle løsning for $5e^t$ vil være $y_p(t) = Ae^t$, hvor A er en konstant. Denne differentieret henholdsvis en og to gange vil ikke givet led, der indeholder Bt eller C, hvor B og C er konstanter, hvorfor vi blot behøver betragte:

$$y'' + 4y' + 20y = 5e^t.$$

Differentieres vores gæt, $y_p(t) = Ae^t$, to gange fås:

$$y_p'(t) = Ae^t, \qquad y_p''(t) = Ae^t.$$

Indsættes dette i differentialligningen fås:

$$Ae^t + 4Ae^t + 20Ae^t = 25Ae^t = 5e^t \Leftrightarrow 25A = 5 \Leftrightarrow A = \frac{1}{5}.$$

Altså er $y_p(t) = \frac{1}{5}e^t$. Da er $g(t) = f(t) + y_p(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{5}e^t$ løsningen.

Opgave 6

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \frac{2x^2 - 2y + 3}{x^2 - y}.$$

a. Definitionsmængden for f består af hvilket par af puntker, (x, y) ?

Vi skal blot se, hvilke værdier for x og y, det går galt for f. Det går kun galt, når nævneren i brøken bliver nul. Dvs. vi må ikke have, at $x^2 - y = 0$, hvorfor definitionsmængden består af punkter, der opfylder:

$$x^2 - y \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq y.$$

b. Hvad kan niveaukurven $f(x, y) = 5$ beskrives som?

Vi har:

$$f(x,y) = \frac{2x^2 - 2y + 3}{x^2 - y} = 5.$$

Ganges med $x^2 - y$ på begge sider fås:

$$f(x,y) = 2x^2 - 2y + 3 = 5(x^2 - y) = 5x^2 - 5y.$$

Vi kan nu prøve at isolere y. Vi får:

$$2x^2 - 2y + 3 = 5x^2 - 5y \Leftrightarrow -2y + 5y = 5x^2 - 2x^2 - 3 \Leftrightarrow 3y = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow y = x^2 - 1.$$

Niveaukurven for $f(x, y) = 5$ er altså en parabel med ligningen $y = x^2 - 1$.

Opgave 7

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = x^2 \arctan y.$$

Hvad er den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x,y)$?

Svar:

Vi skal blot differentiere i forhold til enten x eller y først, hvorefter denne afledte funktion differentieres i forhold til den anden variabel. Vi har:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x \arctan y.$$

Vi har endvidere:

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x \arctan y) = 2x \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{2x}{1+y^2}.$$

Opgave 8

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = x^3 + y - xy.$$

a. Hvad er funktionsværdien i punktet $(-1, 1)$?

Vi indsætter:

$$f(-1, 1) = (-1)^3 + 1 - (-1)1 = -1 + 1 + 1 = 1.$$

b. Hvilket punkt er et kritisk punkt?

Vi differentierer f i forhold til både x og y:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2 - y, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 1 - x.$$

For at et punkt er et kritisk punkt skal vi finde de værdier af x og y, der opfylder, at $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$. Vi ser, at

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Altså skal $x = 1$. Denne værdi indsættes så i den anden af de to afledte:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(1, y) = 3 \cdot 1^2 - y = 3 - y = 0 \Leftrightarrow y = 3.$$

Altså er punktet $(1, 3)$ et kritisk punkt.

c. Grafen for f har en tangentplan i punktet $P = (-1, 1, f(-1, 1))$. Find ligningen for denne.

Vi skal bruge formlen for tangentplaner:

$$z = f_x(P_x, P_y)(x - P_x) + f_y(P_x, P_y)(y - P_y) + P_z.$$

Vi ved, at $P_z = f(-1, 1) = 1$ fra opgave a. Ydermere kan punktet $(-1, 1)$ i de afledte. Vi har:

$$f_x(-1, 1) = 3(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2, \qquad f_y(-1, 1) = 1 - (-1) = 2.$$

Dermed er:

$$z = 2(x-(-1))+2(y-1)+1 = 2(x+1)+2(y-1)+1 = 2x+2+2y-2+1 = 2x+2y+1.$$

Vi kan så isolere konstanten og få:

$$2x + 2y - z = -1.$$

d. Lad $g(t)$ og $h(t)$ være to differentiable funktioner, som opfylder betingelserne $g(0) = 2$, $g'(0) = 1$ og $h(0) = 0$, $h'(0) = 2$. Betragt den sammensatte funktion

$$w(t) = f(g(t), h(t)).$$

Hvad er differentialkvotienten $w'(0)$?

Lad os starte med at indsætte $g(t)$ og $h(t)$ i f. Vi har:

$$w(t) = f(g(t), h(t)) = g(t)^3 + h(t) - g(t)h(t).$$

Vi kan nu differentiere $w(t)$ i forhold til t ved at bruge kæderegel samt produktreglen:

$$w'(t) = 3g(t)^2 g'(t) + h'(t) - \left(g'(t)h(t) + g(t)h'(t)\right).$$

Indsættes 0 i stedet for t kan vi ved brug af betingelserne opnå:

$$\begin{aligned} w'(0) &= 3g(0)^2 g'(0) + h'(0) - (g'(0)h(0) + g(0)h'(0)) \\ &= 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 - (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) \\ &= 3 \cdot 4 + 2 - 4 = 12 - 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Opgave 9

En funktion er defineret ved

$$f(x,y,z) = x^2 - e^y + e^{z+1}.$$

Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1,0,-1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$?

Svar:

Vi skal først finde $\nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z))$. Vi har:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) = -e^y, \qquad \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = 1 \cdot e^{z+1} = e^{z+1}.$$

Altså er:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -e^y, e^{z+1}) \Rightarrow \nabla f(P) = (2 \cdot 1, -e^0, e^{-1+1}) = (2,-1,1).$$

Vi finder nu $D_{\mathbf{u}}f(P)$:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(P) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Opgave 10

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder:

$$x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq y.$$

Udregn værdien af planintegralet:

$$\int\int_{\mathcal{R}} \cos(x^2 + y^2)\, dA.$$

Svar:

Vi vil betragte integralet i forhold til polære koordinater. Vi skal først omskrive grænserne. Da $r^2 = x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$ er

$$0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Fra første ulighed vides, at vi arbejder med en cirkelskive, da der arbejdes med en radius, der varierer uafhængigt af vinklen. Ydermere vides fra anden ulighed, at det kun er cirkelskiven i kvadranterne over x-aksen. Altså er

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

Vi får altså planintegralet (husk at vi ganger med r ved skift af kartesiske koordinater til polære koordinater):

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} r \cos(r^2)\, dr\, d\theta. \tag{11.1}$$

Vi laver integration ved substitution af r^2. Lad $u = r^2$. Så er $\frac{du}{dr} = 2r$, hvor vi så kan isolere dr:

$$dr = \frac{1}{2r} du.$$

Ydermere skal grænserne for r ændres til grænserne for u, hvorfor vi får: $u(0) = 0^2 = 0$ og $u(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}^2 = \frac{\pi}{2}$. Vi får altså integralet (næste side):

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} r\cos(r^2)\,dr\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(u)\frac{1}{2r}\,du\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\frac{1}{2}\,du\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,du\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\sin(u)]_0^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\,[\theta]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}(\pi - 0) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Opgave 11

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 1$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Marker samtlige korrekte udtryk.

Første integral

$$m = \int_0^{1-x-y} \int_0^{1-x} \int_0^1 (1 - z)\, dx\, dy\, dz$$

Området er afgrænset. Men da yderste integral indeholder variable grænser bliver massen af området variabelt. Dette må ikke være tilfældet.

Andet integral

$$m = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x-y} (1 - z)\, dz\, dy\, dx$$

Det ses, at grænserne for x og z ikke er blevet omskrevet. Derfor skal y heller ikke omskrives, men da den øvre grænse er 1 og ikke $1 - x$ integreres over et forkert område.

Tredje integral

$$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1 - z)\, dz\, dy\, dx$$

Vi ser her, at grænserne passer til de respektive variable, samt at densiteten er korrekt.

Fjerde integral

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} dz\, dx\, dy$$

Af ulighederne fremgår det, at $y \leq 1 - x$, hvilket kan omskrives $x \leq 1 - y$. Dvs. vi kan bytte rundt på x og y i tredje integral, hvilket svarer til fjerde integral, dog uden densiteten.

Femte integral

$$V = \int_0^{1-x} \int_0^1 \int_0^{1-x-y} dz\, dx\, dy$$

Lige som ved første integral, så kan dette ikke være volumen for området, da området er konstant, men integralerne varierer, da der står et x i øvre grænse i det yderste integral.

Opgave 12

a. Det gælder, at

$$\frac{d}{dx}\big((x^2+1)\arctan x\big) = 2x\arctan x + 1$$

for alle reelle tal x.

Dette er sandt. Vi skal bruge produktreglen

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g',$$

samt, at $(\arctan x)' = 1/(x^2+1)$. Vi har:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big((x^2+1)\arctan x\big) &= (x^2+1)'\cdot\arctan x + (x^2+1)(\arctan x)' \\ &= 2x\arctan x + (x^2+1)\frac{1}{x^2+1} \\ &= 2x\arctan x + 1.\end{aligned}$$

b. Punktet med polære koordinater $(r,\theta) = (-5,\pi)$ har rektangulære koorindater $(x,y) = (-5,0)$.

Omskrivningen mellem polære koordinater og rektangulære koordinater sker ved

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Vi har:

$$x = -5\cos\pi = -5\cdot(-1) = 5.$$

Allerede her ses, at der er forkert fortegn for x-koordinaten. Altså er dette falsk.

c. For ethvert komplekst tal z gælder der, at

$$|iz| = -|z|.$$

Lad $z = a + bi$. Så er $iz = ai - b$. Dermed er $|iz| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Altså er udsagnet falsk.

d. Lad D være området i planen bestående af de punkter (x,y), som opfylder uligheden $x^2+y^2 \le 4$. Lad f være funktionen med forskrift

$$f(x,y) = x^2y - e^x.$$

og definitionsmængden D. Da antager f globalt minimum på D.

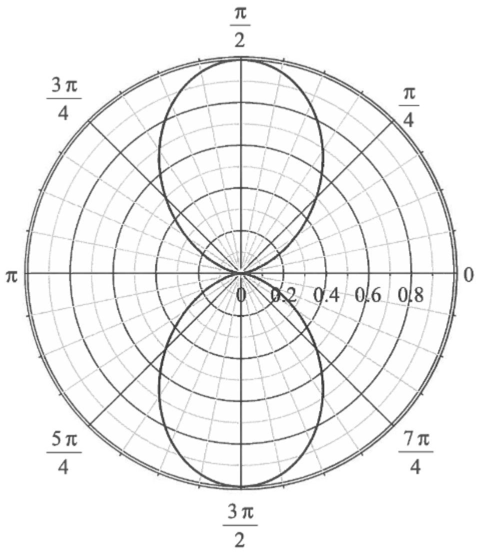
Sandt. Da uligheden begrænser både x og y værdier i en lukket mængde. Se evt. en af eksamenssættene, hvor denne er falsk (måske lettere at forstå).

Opgave 13

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$$f(\theta) = \sin(2\theta), \quad f(\theta) = 1 - \cos\theta, \quad f(\theta) = \sin^2\theta$$

$$f(\theta) = 2 - \sin\theta, \quad f(\theta) = 1 + 2\sin\theta, \quad f(\theta) = \cos^2\theta.$$

Svar:

Vi bruger udelukkelsesmetoden til at finde den rigtige funktion. Vi ser, at funktionen har radius 0 for $\theta = 0$. Vi indsætter altså i hver af funktionerne og får:

$$f(0) = \sin(2 \cdot 0) = 0, \quad f(0) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0, \quad f(0) = \sin^2 0 = 0$$

$$f(\theta) = 2 - \sin 0 = 2, \quad f(0) = 1 + 2\sin 0 = 1, \quad f(0) = \cos^2 0 = 1.$$

Vi ser, at der kun er 3 funktioner, der passer på $\theta = 0$ giver en radius på 0, nemlig $f(\theta) = \sin(2\theta)$, $f(\theta) = 1 - \cos\theta$ og $f(\theta) = \sin^2\theta$. Vi ser igen på figuren og bemærker, at $\theta = \frac{\pi}{2}$ giver en radius på 1. Vi indsætter derfor denne vinkel i de tre tilbageværende funktioner:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Vi har to funktioner tilbage $f(\theta) = 1 - \cos\theta$ og $f(\theta) = \sin^2\theta$. Figuren viser, at $\theta = \pi$ giver en radius på 0:

$$f(\pi) = 1 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2, \quad f(\pi) = \sin^2\pi = 0.$$

Vi indser, at den rigtige funktion er $f(\theta) = \sin^2\theta$.