Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 5. Januar 2018

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

a. Find den fuldstændige løsning.

Vi opstiller den karakteristiske ligning og løser den.

$$r^2 + 4r + 29 = 0.$$

Diskriminanten:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 4(4-29) = 4(-25) = -100 = (10i)^2.$$

Løsningerne bliver da:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{(10i)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 10i}{2} = -2 \pm 5i.$$

Dermed bliver den fuldstændige løsning:

$$y(t) = c_1 \exp^{-2t} \cos(5t) + c_2 \exp^{-2t} \sin(5t).$$

b. Find en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' + 4y' + 29y = 13 \exp^{-3t}.$$

Vi gætter på løsningen $y_p(t) = A \exp^{-3t}$ og differentierer:

$$y_p'(t) = -3A \exp^{-3t}, \quad y_p''(t) = 9A \exp^{-3t}.$$

Vi indsætter i differentialligningen:

$$9A \exp^{-3t} - 12A \exp^{-3t} + 27A \exp^{-3t} = 13 \exp^{-3t}.$$

Divider med $\exp^{-3t}$ på begge sider:

$$9A - 12A + 29A = 26A = 13 \Leftrightarrow A = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}.$$

Altså er den partikulære løsning:

$$y_p(t) = \frac{1}{2} \exp^{-3t}.$$

Opgave 2

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = x^3 - y^3 + 2z^3 - 9.$$

Fladen $\mathcal{F}$ har en tangentplan i punktet $P = (2, 1, 1)$. Find en ligning for tangentplanen.

Metode 1 (Udregning af tangentplan)

Vi differentierer funktionen i forhold til variablene. Vi har:

$$F_x(x, y, z) = 3x^2, \quad F_y(x, y, z) = -3y^2, \quad F_z(x, y, z) = 6z^2.$$

Indsættes punktet $P = (2, 1, 1)$ fås:

$$F_x(P) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12, \quad F_y(P) = -3 \cdot 1^2 = -3, \quad F_z(P) = 6 \cdot 1^2 = 6.$$

Vi opstiller nu tangentplanens ligning:

$$12(x - 2) - 3(y - 1) + 6(z - 1) = 0,$$

hvor parenteserne kan ganges ud:

$$12x - 24 - 3y + 3 + 6z - 6 = 12x - 3y + 6z - 27 = 0 \Leftrightarrow 12x - 3y + 6z = 27.$$

Metode 2 (Udelukkelse):

Det generelle udtryk for tangentplanens ligning er

$$F_x(P)(x - P_x) + F_y(P)(y - P_y) + F_z(P)(z - P_z) = 0.$$

Forholdet mellem x, y og z's koefficienter skal være det samme uanset omskrivningen af ligningen. Ved at differentiere F i forhold til variablene og indsætte punktet P, fandt vi ud af i metode 1, at $F_x(P) = 12$ og $F_y(P) = -3$. Det vil sige, at $F_x(P) = -4 \cdot F_y(P)$. Altså skal forholdet mellem koeffecienterne for x og y være -4. Men der er kun én af svarmulighederne, der opfylder dette. Altså må det være

$$12x - 3y + 6z = 27.$$

Opgave 3

En plan kurve er givet ved

$$x = t - 2t^2,$$
$$y = 2t + t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

a. Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 1$?

Vi indsætter blot $t = 1$ i kurvens ligninger:

$$x(1) = 1 - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1, \quad y(1) = 2 \cdot 1 + 1^2 = 2 + 1 = 3.$$

Punktet på kurven er altså $(-1, 3)$.

b. Hvad er kurvens krumning for $t = 1$?

Vi skal bruge formlen

$$\kappa(t) = \frac{|x' \cdot y'' - x'' \cdot y'|}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}.$$

Vi differentierer altså først x og y to gange:

$$x'(t) = 1 - 4t, \quad x''(t) = -4, \quad y'(t) = 2 + 2t, \quad y''(t) = 2.$$

Indsætter vi $t = 1$ fås:

$$x'(1) = 1 - 4 \cdot 1 = -3, \quad x''(1) = -4, \quad y'(1) = 2 + 2 \cdot 1 = 4, \quad y''(1) = 2.$$

Vi får altså:

$$\kappa(1) = \frac{|-3 \cdot 2 - (-4) \cdot 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}^3} = \frac{|-6 + 16|}{\sqrt{9 + 16}^3} = \frac{|10|}{\sqrt{25}^3} = \frac{10}{5^3} = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}.$$

c. For hvilken værdi af parameteren t er krumningen maksimal?

Lad os betragte krumningen uden at indsætte t:

$$\kappa = \frac{|(1-4t) \cdot 2 - (-4) \cdot (2+2t)|}{\sqrt{(1-4t)^2 + (2+2t)^2}^3} = \frac{|2 - 8t + 8 + 8t|}{\sqrt{(1 + 16t^2 - 8t) + (4 + 4t^2 + 8t)}^3} = \frac{10}{\sqrt{5 + 20t^2}^3}.$$

Vi ser, at tælleren er konstant. Det vil altså sige, at det kun er nævneren, der afhænger af t! Hvis vi skal have den størst mulige krumning, skal vi altså blot finde det t, der gør nævneren så lille som muligt. Vi ser desuden, at nævneren kun afhænger af t gennem $20t^2$, hvilket altid er positivt. Hvis vi skal gøre dette led så lille som muligt, skal vi altså sætte $t = 0$, da alle andre værdier blot for nævneren til at vokse. Krumningen er altså maksimal for $t = 0$.

Opgave 4

En funktion er givet ved
$$f(x) = (4x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

a. Hvad er den dobbelt afledede $f''(x)$?

Vi skal bruge kædereglen. Vi sætter den ydre funktion til at være $y^{1/2}$ (hvor $y = 4x+1$), hvilken vi differentierer i forhold til y. Den indre funktion sættes til at være $(4x+1)$, hvilken differentieres i forhold til x. Disse skal så ganges sammen til sidst:
$$\left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}}.$$
og
$$(4x+1)' = 4.$$
Disse ganges sammen, og vi får:
$$f'(x) = 4\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} = 2(4x+1)^{-\frac{1}{2}}.$$
Det var den første afledede. Vi bruger samme fremgangsmåde til at finde den dobbelt afledede. Den indre funktion er som før. Den ydre er nu blot $2y^{-1/2}$. Vi får
$$\left(2y^{-\frac{1}{2}}\right)' = -2\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}-1} = -y^{-\frac{3}{2}} = -(4x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$
Ganges disse sammen fås:
$$-4(4x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

b. Angiv tredje ordens Taylor polynomiet f med udviklingspunktet $x = 0$.

For at gøre dette så simpelt som muligt, er det vigtigt at bemærke, at udviklingspunktet er $x = 0$. Det betyder, at Taylor polynomiet reduceres fra den generelle form til:
$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3.$$
Det har den konsekvens, at vi blot kan tjekke, om $f(0)$ stemmer over ens med det konstante led i svarmulighederne. Om $f'(0)$ stemmer over ens med ledet, der har et x i svarmulighederne og så fremdeles. Vi indsætter 0 og får:
$$f(0) = (4\cdot 0+1)^{\frac{1}{2}=1^{\frac{1}{2}}=1.}$$
Dette udelukker kun svarmuligheden, hvor konstanten er 2. Vi prøver med den næste:
$$f'(0) = 2(4\cdot 0+1)^{-\frac{1}{2}} = 2\cdot 1^{-\frac{1}{2}} = 2.$$
Dette er der kun 2 svar muligheder, der opfylder. Vi prøver så med den dobbelt afledede. Husk, at denne skal divideres med to i forhold til koefficienten for x^2:
$$\frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}\left(-4(4\cdot 0+1)^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2.$$

Vi ser altså, at den eneste løsning, der opfylder de hidtil udregnede krav, er:

$$1 + 2x - 2x^2 + 4x^3.$$

Havde der stadig været to muligheder, skulle vi have udregnet den tredje afledede, men det er der ingen grund til her. Set i bagklogskabens lys, skulle vi bare have valgt at udregne $f''(0)/2$ fra start, da det kun er svarmuligheden, der stemmer overens med denne koefficient til x^2.

Opgave 5

En partikel bevæger sig langs en kurve i rummet. Positionsvektoren for partiklen til tiden t er

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}t\rangle.$$

a. Hvad er hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t)$?

Vi differentierer blot $\mathbf{r}(t)$ og får:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}(t) = \langle e^t,\ -e^{-t},\ \sqrt{2}\rangle.$$

b. Hvad er farten $v(t)$?

Vi har, at $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$. Dermed fås:

$$v(t) = \sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{(e^t)^2 + (e^{-t})^2 + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}.$$

Hvor vi ved andet sidste lig med har anvendt en kvadratsætning, da

$$(e^t + e^{-t})^2 = (e^t)^2 + (e^{-t})^2 + 2e^t e^{-t} = (e^t)^2 + (e^{-t})^2 + 2e^{t-t} = (e^t)^2 + (e^{-t})^2 + 2.$$

c. Partiklen gennemløber et stykke af bevægelseskurven i tidsrummet $0 \leq t \leq 1$. Hvad er buelængden af dette kurvestykke?

Vi skal blot integrere $v(t)$ fra 0 til 1. Vi har:

$$\int_0^1 e^t + e^{-t}\, dt = \left[e^t - e^{-t}\right]_0^1 = (e^1 - e^{-1}) - (e^0 - e^{-0}) = e^1 - e^{-1}.$$

Opgave 6

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{1+i}{3-2i}, \quad z_2 = \frac{2i}{1+i}.$$

a. Hvad er z_1 skrevet på standard form?

Dette er den hurtigste måde at lave denne opgave på. Jeg har redegjort for den sikreste metode i de andre besvarelser, så tjek dem, hvis du er i tvivl.

Vi kan blot forlænge brøken med det konjugerede komplekse tal til det i nævneren. Da $z\bar{z} = \|z\|^2$. Har vi for nævneren:

$$(3-2i)(3+2i) = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13.$$

Da nævneren ved den forlængede brøk er et primtal, og tælleren ikke får multiplum af dette, kan vi konkludere, at svaret må være

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

b. Hvad er z_2 skrevet på polær form?

Jeg orker ikke at beskrive den 'matematiske' fremgangsmåde (denne er mere af 'erfaring'). Den generelle fremgangsmåde kan findes i de andre besvarelser.

Vi indser hurtigt, at $2i$ er rent imaginært. Det vil sige, at den ligger 2 op ad den imaginære akse. Dermed er $r_1 = 2$ og $\theta_1 = \pi/2$. Ydermere ser vi, at nævneren er $1 + i$, hvilken altså ligger lige imellem real- og imaginær-aksen. Dette er et meget klassisk komplekst tal, så vi ved, at $r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ med $\theta_2 = \pi/4$. Vi opstiller altså:

$$z_2 = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Opgave 7

En funktion er givet ved
$$f(x,y) = \frac{4x - 2y^2 - 3}{x^2 - y^2}.$$

a. Hvad er definitionsmængden for f?

Det bedste spørgsmål at stille sig selv er: Kan funktionen fucke op, og i såfald hvornår sker dette?

Jo, i vores tilfælde kan nævneren give problemer. Vi må jo ikke dividere med 0. Hvornår bliver nævneren så 0? Jamen, det sker når:
$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2} = \pm x.$$

Så lige så snart, at $y = x$ eller $y = -x$ er der problemer. Så hele vores definitionsmængde er altså alle par (x, y), hvor der gælder, at $y \neq x$ og $y \neq -x$.

b. Hvad kan niveaukurven med ligning $f(x.y) = 1$ beskrives som?

Vi har, at
$$\frac{4x - 2y^2 - 3}{x^2 - y^2} = 1.$$
Lad os gange med nævneren på begeg sider:
$$4x - 2y^2 - 3 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0.$$

Vi ser, at der er x^2 og et x. Så dette kun tyde på at være en cirkel, eftersom der også er et y^2. Hvordan man ville faktorisere dette har jeg uddybet i tidligere besvarelser - dette gider jeg dog ikke her. Så cirklensligning bliver:
$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 1.$$

Det er altså en cirkel med centrum i $(2, 0)$ med radius 1.

Opgave 8

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2.$$

a. Hvad er funktionsværdien $f(1,1)$?

$$f(1,1) = 1 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 6 - 3 = -8.$$

b. Bestem de kritiske punkter.

Vi differentierer først funktionen i forhold til x og y:

$$f_x(x,y) = y^2 - 12x, \quad f_y(x,y) = 2xy - 6y = y(2x-6).$$

Kritiske punkter, giver 0-værdier i disse afledede funktioner. Betragt:

$$f_y(x,y) = y(2x-6) = 0.$$

Denne funktion er kun 0, hvis $y = 0$ eller $x = 3$ - de behøver dog ikke være disse værdier på samme tid. Betragt derfor $f_x(3,y)$ og $f(x,0)$:

$$f_x(3,y) = y^2 - 12 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Dermed er $(3,6)$ og $(3,-6)$ kritiske punkter. Endvidere ses:

$$f_y(x,0) = 0^2 - 12x = -12x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Altså er $(0,0)$ det sidste kritiske punkt.

c. Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P(-1,1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1,1\rangle$?

Vi finder først gradient vektoren i punktet (husk, vi har differentieret funktionen i forrige opgave):

$$f_x(-1,1) = 1^2 - 12 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13, \quad f_y(-1,1) = 1(2 \cdot (-1) - 6) = -8.$$

Gradientvektoren er altså $\langle 13, -8\rangle$. Vi skal altså blot prikke denne med $\mathbf{u}$, hvormed der fås:

$$\begin{bmatrix} 13 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(13 \cdot 1 + (-8) \cdot 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(5) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

d. Bestem en ligning for tangentplanen til grafen f i punktet $Q = (1,1,f(1,1))$.

Da ingen af hældningskoefficienterne har ens forhold (forholdet mellem tallene foran x og y) på tværs af ligningerne, er det nok blot at udregne $f_x(1,1)$ og $f_y(1,1)$. Vi har:

$$f_x(1,1) = 1^2 - 12 \cdot 1 = -11, \quad f_y(1,1) = 1(2 \cdot 1 - 6) = -4.$$

Den eneste ligning, der opfylder dette forhold er $11x + 4y + z = 7$.

Opgave 9

Lad

$$g(x,y,z) = \arctan(x^2+y^2-z^2).$$

I hvilken retning ud fra punktet $P = (1,-1,1)$ er den retningsafledede af funktionen g størst?

Svar:

Dette finder vi ved formlen

$$\frac{\nabla g(P)}{\|\nabla g(P)\|}.$$

Vi differentierer altså først g i forhold til alle variablene (brug kædereglen):

$$g_x(x,y,z) = \frac{2x}{(x^2+y^2-z^2)^2+1},$$

$$g_y(x,y,z) = \frac{2y}{(x^2+y^2-z^2)^2+1},$$

$$g_z(x,y,z) = \frac{-2z}{(x^2+y^2-z^2)^2+1}.$$

Indsættes punktet i disse funktioner fås:

$$g_x(1,-1,1) = \frac{2\cdot 1}{(1^2+(-1)^2-1^2)^2+1} = \frac{2}{1+1-1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$g_y(1,-1,1) = \frac{2\cdot(-1)}{(1^2+(-1)^2-1^2)^2+1} = \frac{-2}{1+1-1+1} = -\frac{2}{2} = -1.$$

$$g_z(1,-1,1) = \frac{-2\cdot 1}{(1^2+(-1)^2-1^2)^2+1} = \frac{-2}{1+1-1+1} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Dermed er

$$\nabla g(P) = \langle 1,-1,-1\rangle.$$

Længden af denne er altså:

$$\|\nabla g(P)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3},$$

hvorfor

$$\frac{1}{\|\nabla g(P)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Altså er den retning med maksimal ændring:

$$\frac{\nabla g(P)}{\|\nabla g(P)\|} = \frac{1}{\|\nabla g(P)\|}\nabla g(P) = \frac{\sqrt{3}}{3}\langle 1,-1,-1\rangle.$$

Opgave 10

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

Hvad er værdien af integralet

$$\int\int_{\mathbb{R}} x(\sqrt{x^2 + y^2})\, dA.$$

Svar:

Du skal måske tegne området. Here goes: Vi ved, at $0 \leq y$, så området er over x-aksen. Derudover er $0 \leq x$, hvorfor området er til højre for y-aksen. Vi er altså i første kvadrant. Hvis vi betragter dette i polære koordinater, betyder det, at vores vinkel løber fra 0 til $\pi/2$.

Vi har desuden, at $x^2 + y^2 = r^2$. Det vil sige:

$$r^2 \leq 16 \Rightarrow r \leq \sqrt{16} = 4.$$

Så vores grænser er altså:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq r \leq 4.$$

Vi husker desuden, at $x = r\cos\theta$. Dermed bliver integralet (husk at gange med r ved skift til polær integration):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 r\cos\theta\sqrt{r^2} r\, dr\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \int_0^4 r^3\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{1}{4}r^4\right]\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left(\frac{1}{4}4^3\right)\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta 64\, d\theta \\
&= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \\
&= 64\, [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 64\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 64.
\end{aligned}$$

Opgave 11

Et område $\mathcal{T}$ i rummet består af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 5 - xy.$$

Et legeme med massefylde (densitet) $\delta(x, y, z) = x$ dækker netop område $\mathcal{T}$.

a. Hvad er rumfanget (volumen) af $\mathcal{T}$?

Vi har:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{5-xy} 1 \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^2 5 - xy \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[5y - \frac{1}{2}xy^2\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 10 - 2x \, dx \\
&= \left[10x - x^2\right]_0^1 \\
&= 10 - 1 \\
&= 9.
\end{aligned}$$

b. Hvad er massen af legemet, der dækker $\mathcal{T}$?

Samme integral - bortset fra, at vi integrerer over x (dvs. densiteten), frem for 1:

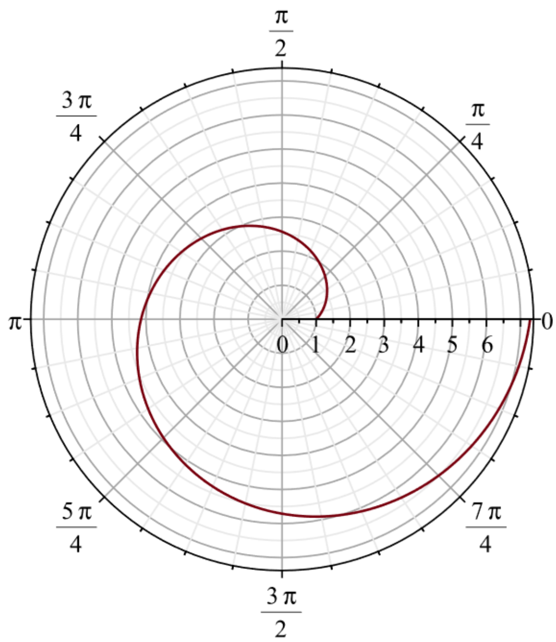
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{5-xy} x \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^2 5x - x^2 y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[5xy - \frac{1}{2}x^2 y^2\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 10x - 2x^2 \, dx \\
&= \left[5x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= 5 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{15}{3} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{13}{3}.
\end{aligned}$$

Opgave 12

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af forskrifterne for f svarer til figuren?

Svar:

Vi bemærker først, at figurens radius ligger i intervallet $1 \leq r < 8$. Vi husker, at cosinus og sinus er periodiske funktioner. Deres maksimale værdier er 1 og minimale tilsvarende -1. Det ses, at funktionerne, der indeholder disse, ikke vil kunne komme op på værdier større end eksempelvis 3. Der er altså kun 2 mulige svar tilbage:

$$f(\theta) = 1 + \theta, \qquad f(\theta) = 1 + \theta^2.$$

Vi kan ikke helt udregne π i hovedet, med et grovt estimat kan vi sige, at $\pi \approx 3$. Af Figuren ser vi, at $f(\theta) \approx 4$. Lad os da indsætte $\theta = 3$:[1]

$$f_2(3) = 1 + 3 = 4, \qquad f_6(3) = 1 + 3^2 = 10.$$

Vi har valgt en værdi for θ, der ligger i intervallet $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Figuren viser kun værdier for r, der er mindre end 8, men vi ser alligevel, at f_6 giver værdien 10. - Og vi er ikke mere end halvvejs i vinkelintervallet. Dermed kan vi udelukke f_6. Svaret er da:

$$f_2(\theta) = 1 + \theta.$$

Derudover var $f_2(3) = 4$, hvilket var den approksimativt aflæste værdi på figuren til $\theta = \pi$. Man bør dog ikke bruge approksimative udregninger til at drage konklusioner (vi kan dog bruge det her, da $f_6(3)$ ligger uden for figuren). Brug i stedet uligheder og drag konklusioner på baggrund af dette.

[1] Jeg benævner funktionerne med f_2 og f_6 for at sige, hvilke at svarmulighederne, jeg kigger på.