Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 14. Januar 2019

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En funktion er defineret ved

$$f(x, y) = x + \frac{y^2 - 3}{x}$$

for reelle variable x og y.

a. Bestem definitionsmængden for f.

Når vi arbejder med definitionsmængder, er det oftest lettest at spørge, 'hvad kan gå galt her'. Og hvis man i bedste Jonatan Spang stil kan sige: 'Jeg kan ikke se noget problem!', så er det nok alle de mulige talpar, der tilhører definitionsmængden. Men når vi som i vores tilfælde arbejder med eksempelvis en brøk, så er der oftest noget, der kan gå galt. Vi ser, at vi dividerer med x. Vi må ikke dividere med 0, derfor må $x \neq 0$. Vi er ligeglade med, om x er negativ eller positiv, bare den ikke er 0. Og fuck y. Den/det/hun/han, y, er nemlig ligegyldig i den her kontekst, da den ikke kan lave rod i vores funktion på nogen måde.

b. Bestem et udtryk for niveaukurven $f(x, y) = 2$.

Stærkt - vi skal altså kigge på:

$$x + \frac{y^2 - 3}{x} = 2.$$

Jeg elsker at slippe af med brøker først. Så jeg ganger med x på begge sider:

$$x^2 + y^2 - 3 = 2x.$$

Da vi ser, at der både er et kvadreret led for x, dvs. x^2, og et kvadreret led for y, dvs. y^2, samtidig med, at der er MINDST ét led, der indeholder et x eller y (det vil sige uden potens) - så kan vi gætte os til, at der er tale om en cirkel! Det vil sige, vi skal prøve at få den skrevet på formen som cirklens ligning

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Vi starter med at samle alle konstanter på højre side, og alle x og y'er på venstre side (altså vi trækker $2x$ fra på begge sider, og lægger 3 til på begge sider):

$$x^2 - 2x + y^2 = 3.$$

Vi kan hurtigt se, at

$$x^2 - 2x + (y - 0)^2 = x^2 - 2x + y^2 = 3.$$

Det stemmer også over ens med de to muligheder for cirkler, der er som svarmulighder. Vi skal nu bare bestemme a i det led, der hedder $(x - a)^2$. En kvadratsætning giver, at

$$(x - a)^2 = x^2 + a^2 - 2ax.$$

Vi kan se, at x^2 findes i begge ligninger. Vi ved pt. ikke, hvordan konstanten, a^2, ser ud, da vi så ville kende a. Men vi kan se, det dobbelte produkt. Nemlig $-2ax$, hvilket fremgår i form af $-2x$. Vi har altså:

$$-2ax = -2x.$$

Divideres med $-2x$ på begge sider får vi, at

$$a = 1.$$

Men det betyder, at

$$(x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x.$$

Vi kan altså lægge et 1-tal til på begge sider, hvormed

$$x^2 - 2x + (y-0)^2 = 3$$

bliver til

$$x^2 + 1 - 2x + (y-0)^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$$

Men venstresiden kan vi faktorisere, da $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2$. Vi får

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2.$$

Vi har altså at gøre med en cirkel, der har centrum i $(1,0)$ med radius 2. I svarmuligheden siger den dog, at $\pm(0, \sqrt(3))$ er ekskluderet. Men det skyldes, at vi i vores originale funktion $f(x,y)$ ikke måtte have $x = 0$ (opgave a). Så vi mangler bare at vide, hvad y-værdierne er for $x = 0$:

$$(0-1)^2 + (y-0)^2 = 1 + y^2 = 2^2 = 4.$$

Dermed er

$$y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}.$$

Altså er $y = \pm\sqrt{3}$, når $x = 0$. Derfor skal vi ekskludere disse to punkter.

Opgave 2

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), \cos(2t), e^{\sin(t)} \rangle,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

a. Bestem kurvens fart.

Først skal vi udregne hastighedsvektoren. Vi differentierer altså $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = \langle 2\cos(2t), -2\sin(2t), \cos(t)e^{\sin(t)} \rangle.$$

Vi kan nu udregne farten, som er længden af $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(2\cos(2t))^2 + (-\sin(2t))^2 + \left(\cos(t)e^{\sin(t)}\right)^2} \\ &= \sqrt{4\cos^2(2t) + 4\sin^2(2t) + \cos^2(t)e^{2\sin(t)}} \\ &= \sqrt{4(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) + \cos^2(t)e^{2\sin(t)}} \\ &= \sqrt{4 + \cos^2(t)e^{2\sin(t)}} \end{aligned}$$

Bemærk, at jeg har brugt idiotformlen, $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

b. Bestem kurvens accelerationsvektor for $t = 0$.

Vi skal først differentiere $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle -4\sin(2t), -4\cos(2t), e^{\sin(t)}(\cos(t) - \sin(t)) \rangle$$

Nu kan vi bare smide vores $t = 0$ ind og opnå:

$$\mathbf{a}(0) = \langle -4\sin(2\cdot 0), -4\cos(2\cdot 0), e^{\sin(0)}(\cos(0) - \sin(0)) \rangle = \langle 0, -4, 1 \rangle.$$

Opgave 3

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 4 \quad \text{og} \quad z_3 = -2i.$$

a. Opskriv $z_1 + z_3$ på polær form.

Vi finder ved addition, at

$$z_1 + z_3 = 1 + i + (-2i) = 1 - i$$

Vi ved, at $arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$. Dette ved vi, fordi det komplekse tal er lige langt fra både den reelle akse såvel som den imaginære akse. Men det komplekse tal ligger på den negative side af den imaginære akse.[1] Så argumentet (vinklen) for det komplekse tal er $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Endvidere er modulus (længden) af det komplekse tal:

$$|z_1 + z_3| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Et komplekst tal z skrevet på den polære form er

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Derfor kan vi skrive:

$$z_1 + z_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

b. Hvad er $\frac{z_2}{z_3}$ på standardform?

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{4}{-2i} = -\frac{2}{i} = -\frac{2i}{i^2} = -\frac{2i}{-1} = \frac{2i}{1} = 2i$$

[1] Hvis du vil se udregninger, så bør du tjekke tidligere eksamenssæt.

Opgave 4

En homogen andenordens differentialligning er givet ved

$$y'' = 0.$$

Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen med arbitrære konstanter.

Svar:

Vi skal have en funktion, der skal give 0, når vi har differentieret den to gange. Det betyder, at funktionen IKKE kan indeholde hverken, cos eller sin, da disse blot bliver til hinanden ved differentiation (med omvendt fortegn i nogle tilfælde). Vi kan heller ikke have noget, der indeholder eksponentialfunktionen, e^t, da denne blot giver sig selv, når differentieret. Hvad sker der, når man differentierer et andengradspolynomium 2 gange?

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a.$$

Men $2a$ er ikke 0 for vilkårlige a (dvs. for alle $a \in \mathbb{R}$). Så vi har kun en funktion tilbage, nemlig $c_1 t + c_2$, da

$$y = c_1 t + c_2 \Rightarrow y =' = c_1 \Rightarrow y'' = 0.$$

Opgave 5

Find løsningen $x(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) = \sin(t)$$

med begyndelsesværdierne $x(0) = 0$ og $x'(0) = 0$.

Svar:

Normalvis ville vi gætte på en partikulær løsning, men da venstre-siden udelukkende består af $x''(t)$ samtidig med, at højresiden udelukkende består af en funktion af t, kan vi blot integrere. Det vil sige, at vi har:

$$x'(t) = \int x''(t)\, dt = \int \sin(t)\, dt = -\cos(t) + c_1.$$

Vi kan altså anvende den ene begyndelsesværdi til at bestemme c_1:

$$x'(0) = 0 \Leftrightarrow -\cos(0) + c_1 = -1 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

Så

$$x'(t) = -\cos(t) + 1.$$

Vi kan nu integrere $x'(t)$:

$$x(t) = \int x'(t)\, dt = \int -\cos(t) + 1\, dt = -\sin(t) + t + c_2.$$

Bruges den sidste begyndelsesværdi opnås:

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow -\sin(0) + 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

Derfor ser vi, at

$$x(t) = -\sin(t) + t.$$

Opgave 6

Besvar følgende sandt eller falsk spørgsmål.

a. Hastighedsvektoren til en kurve kan have længde nul.

Nej. Det kræver, at $x(t) = konstant$ og $y(t) = konstant$, men det betyder kort sagt, at vi ikke har en kurve men et fast punkt, da hverken x og y ændrer sig ved en ændring af tiden.

b. Når et punkt bevæger sig på en cirkel med radius R, så peger accelerationen mod cirklens centrum, hvis farten er konstant.

Ja.

c. Summen af to funktioner, som er diskontinuerte i et punkt, er altid diskontinuert i det punkt.

Nej. Hvis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

og

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Hvis vi lægger f og g sammen, får vi:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1 + (-1), & x > 0 \\ 0 + 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} = 0.$$

Så $f(x) + g(x)$ er 0 ALTID, og dermed er den ikke diskontinuert i punktet 0.

d. Følgen $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ konvergerer mod 1, når n går mod uendelig.

Sandt. Vi bruger L'Hôpitals regel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)'}{(n^2+1)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} = 1.$$

Opgave 7

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af fællesmængden mellem den øvre halvplan og en disk med radius 2 og centrum i origo. Et legeme med massetæthed $\delta(x, y) = x^2y$ dækker netop området $\mathcal{R}$.

a. Beskriv området $\mathcal{R}$ med en ulighed.

Cirklens ligning for den givne cirkel er:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}.$$

Men den nedre grænse skal være $y = 0$, da vi kun fokuserer på den øvre halvplan. Vi får altså grænserne:

$$0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Derudover varierer x blot over -2 og 2. Så vores uligheder er

$$-2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

b. Hvad er den korrekte formel, som giver legemets masse?

Vi skal blot integrere over densitetsfunktionen med grænserne fundet i forrige opgave. Vi får altså:

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} x^2y \, dy \, dx.$$

Opgave 8

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y), som opfylder to uligheder: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$, $y \geq 0$. Udregn planintegralet $\int_{\mathcal{R}} x^2 y \, dA$.

Svar 1, polær integration:

Vi kan se, at $x^2 + y^2$ indgår i ulighederne. Det vil sige, at polære koordinater formentligt er en god idé. Da, $x^2 + y^2 = r^2$ får vi:

$$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r \leq 2.$$

Endvidere skal det kun være den øvre halvplan. Det vil sige, at $y \geq 0$ betyder, at vi kun kigger på vinklerne $0 \leq \theta \leq \pi$. Vores polære grænser er altså:

$$0 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Betragtes funktionen i integralet kan denne omskrives til polær form:

$$x^2 y = r^2 \cos^2\theta \cdot r \sin\theta = r^3 \cos^2\theta \sin\theta.$$

Vi kan altså udregne integralet (husk omskrivning fra kartesisk integration til polær integration kræver, at man ganger funktionen med r):

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^\pi r \cdot r^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, dr &= \int_0^2 \int_0^\pi r^4 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^2 r^4 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^2 r^4 \, dr.
\end{aligned}$$

Bemærk, at jeg har splittet integralerne op. Det kan kun gøres, fordi grænseværdierne for θ og r ikke afhænger af hinanden, samtidig med, at funktionerne kun er ganget sammen. Integralet med r er simpelt at udregne. Endvidere kan vi se, at

$$\left(-\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right)' = -\frac{1}{3}\left(\cos^3(\theta)\right)' = -\frac{1}{3}(3\cos^2\theta \cdot (-\sin\theta)) = \cos^2\theta \sin\theta$$

ved brug af kædereglen. Altså er samtfunktionen til $\cos^2\theta \sin\theta$ funktionen $-\frac{1}{3}\cos^3\theta$. Vi får endvidere:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^2 r^4 \, dr &= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi \cdot \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^2 \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cos^3\pi - \left(-\frac{1}{3}\cos^3 0\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{1}{5} \cdot 0^5\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 1\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 32\right) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{32}{5} \\
&= \frac{64}{15}.
\end{aligned}$$

Svar 2, kartesisk integration

Selvom opgaven måske lægger op til, at det er polær integration, så behøver vi faktisk ikke gøre så meget. For hvis vi kigger på ulighederne

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2^2$$

og

$$y \geq 0.$$

Så er det præcis samme beskrivelse, som vi stødte på i opgave 7. En halvcirkel i den øvre halvplan med radius 2. Det vil altså sige, at vi kan bruge det integral, vi opskrev der og udregne det.

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\,dy\,dx &= \int_{-2}^{2} x^2 \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 \left[y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 \left(\sqrt{4-x^2}^2 - 0^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 4x^2 - x^4\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4\cdot 5}{3\cdot 5}x^3 - \frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}x^5\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4\cdot 5}{15}x^3 - \frac{3}{15}x^5\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}\left[4\cdot 5x^3 - 3x^5\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}\left(\left(4\cdot 5\cdot 2^3 - 3\cdot 2^5\right) - \left(4\cdot 5\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^5\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}\left((5\cdot 32 - 3\cdot 32) - (-5\cdot 32 + 3\cdot 32)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}\left(5\cdot 32 - 3\cdot 32 + 5\cdot 32 - 3\cdot 32\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}\left(2\cdot 5\cdot 32 - 2\cdot 3\cdot 32\right) \\
&= \frac{1}{15}\left(5\cdot 32 - 3\cdot 32\right) \\
&= \frac{32}{15}(5-3) \\
&= \frac{32}{15}\cdot 2 \\
&= \frac{64}{15}.
\end{aligned}
$$

Principielt er forskellen på de to metoder altså mængden af brøk-nørkleri. Personligt vil jeg bruge denne metode, men aldrig skrive så mange mellemregninger - men noterne er jo lavet for jeres skyld og ikke min, så jeg måtte hellere have nok mellemregninger med.

Opgave 9

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x,y,z)=0$, hvor

$$F(x,y,z)=x^2y^2-z^2.$$

a. Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P=\{1,1,1\}$.

Vi skal bruge tangentplanens ligning:

$$F_x(P)(x-P_x)+F_y(P)(y-P_y)+F_z(P)(z-P_z)=0.$$

Så vi skal altså blot differentiere F i forhold til de tre variable og indsætte P. Vi får:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= 2xy^2, \quad & F_x(1,1,1) &= 2\cdot 1\cdot 1^2 = 2. \\ F_y(x,y,z) &= 2x^2y, \quad & F_y(1,1,1) &= 2\cdot 1^2\cdot 1 = 2. \\ F_z(x,y,z) &= -2z, \quad & F_z(1,1,1) &= -2\cdot 1 \quad = -2. \end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte dette i vores tangentplanens ligning:

$$2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-2z-2-2+2=0 \Leftrightarrow x+y-z-1=0 \Leftrightarrow x+y-z=1.$$

b. Fra ligningen $F(x,y,z)=0$, hvad er den partielle afledede $\partial z/\partial y$ i punktet P?

Implicit funktionssætningen medfører, at

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

Fra forrige opgave udregnede vi de afledte værdier for F_y og F_z i punktet P. Vi får altså for punktet P, at

$$\frac{\partial z}{\partial y}(P)=-\frac{F_y(P)}{F_z(P)}=-\frac{2}{-2}=1.$$

Opgave 10

En funktion er givet ved
$$f(x,y) = \sin(xy),$$
for variable x og y, der begge gennemløber alle de reelle tal.

a. Har funktionen f uendeligt mange kritiske punkter?

Vi ser på de afledede (husk at bruge kædereglen):
$$f_x(x,y) = y\cos(xy), \qquad f_y(x,y) = x\cos(xy).$$
Begge de afledede skal være 0, hvis et punkt skal være et kritisk punkt. Hvis $\cos(xy) = 0$, så er begge funktioner præcist 0. Men der er uendeligt mange måder at opnå denne værdi for cos, da det er en periodisk funktion, hvor 0 indgår i kodomænet (værdimængden). Altså er der også uendeligt mange kritiske punkter.

b. Har funktionen f en global minimumsværdi?

Ja da. Vi ved, at sinus er en funktion, hvis værdier ligger mellem $[-1,1]$. Da værdierne godt kan være -1 men ikke mindre, så er -1 den globale minimumsværdi.[2]

c. Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Vi skal først differentiere f og indsætte punktet P. - Jeg differentierede f i opgave a, så vi indsætter blot P i disse:
$$f_x(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}\cos(-\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}\cos\left(-\sqrt{\pi}^2\right) = \sqrt{\pi}\cos(-\pi) = \sqrt{\pi}\cos(\pi) = -\sqrt{\pi}$$
og
$$f_y(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}\cos(-\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}\cos\left(-\sqrt{\pi}^2\right) = \sqrt{\pi}\cos(-\pi) = -\sqrt{\pi}\cos(\pi) = \sqrt{\pi}.$$
Vi har nu
$$\nabla f(P) = \left(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right)$$
samt
$$\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$
Dermed får vi
$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\mathbf{u} = -\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

[2] Så du skal svare falsk i eksamenssættet.

d. Bestem retningen hvori f aftager hurtigst i punktet P.

Retningen hvor f aftager hurtigst er givet ved

$$-\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}.$$

Vi kender allerede $\nabla f(P)$ fra forrige opgave. Så vi mangler blot at udregne længden af denne:

$$|\nabla f(P)| = \sqrt{(-\sqrt{\pi})^2 + \sqrt{\pi}^2} = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2}\sqrt{\pi}.$$

Altså

$$-\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{pi}}\left(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right) = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Opgave 11

En funktion er givet ved

$$f(x) = \exp(x^2) = e^{x^2}$$

for alle reelle tal x.

a. Bestem $f^{(3)}(x)$.

Vi differentierer første gang:

$$f'(x) = 2xe^{x^2} = 2xf(x).$$

Vi differentierer nu igen med produktreglen:

$$f''(x) = (2x)' \cdot f(x) + 2x \cdot f'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) = 2f(x) + 4x^2 f(x).$$

Og vi differentierer igen ved at bruge produktreglen:

$$\begin{aligned}
f^{(3)}(x) &= 2f'(x) + (8xf(x) + 4x^2 f'(x)) \\
&= 4xf(x) + 8xf(x) + 8x^3 f(x) \\
&= 12xf(x) + 8x^3 f(x) \\
&= 4x(3 + 2x^2)f(x) \\
&= 4x(3 + 2x^2)e^{x^2}.
\end{aligned}$$

b. Bestem et udtryk for Taylor polynomiet af tredje orden for f med udviklingspunkt $x = 0$.

Taylor polynomiet for orden tre med udviklingspunkt $x = 0$ er givet ved:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(x)x^2 + f^{(3)}(0)x^3.$$

Vi skal altså blot indsætte 0 i de udtryk, vi fandt i opgave a:

$$\begin{aligned}
f(0) &= e^{0^2} = e^0 = 1. \\
f'(0) &= 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 0 \\
f''(0) &= 2f(0) + 4 \cdot 0^2 f(x) = 2 \\
f^{(3)}(0) &= 4 \cdot 0(3 + 2 \cdot 0^2)f(0) = 0.
\end{aligned}$$

Vi indsætter dette i førnævnte udtryk:

$$P_3(x) = 1 + 0x + \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + 0x^3 = 1 + x^2.$$

Opgave 12

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = \sin(2t),$$
$$y(t) = \cos(t)$$

for alle reelle tal t.

a. For hvilken positiv værdi af parameteren t går kurven første gang gennem origo?

For at $y(t) = 0$ skal $t = k \cdot \frac{\pi}{2}$, hvor k er et ulige tal. Det første ulige positive tal er 1, hvorfor vi kigger på $k = 1$, hvilket betyder $\frac{\pi}{2}$. Da

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) = \sin(\pi) = 0,$$

er $\pi/2$ altså den værdi, vi leder efter.

b. Hvad er kurvens krumning i origo?

Jeg gætter umiddelbart på den er nul ud fra periodiciteten, men lad os differentiere x og y i forhold til t to gange:

$$x'(t) = 2\cos(2t), \quad x''(t) = -4\sin(2t), \quad y'(t) = -\sin(t), \quad y''(t) = -\cos(t).$$

Indsættes $t = \frac{\pi}{2}$ som var den t-værdi, der gav origo for vores kurve, fås:

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Da

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot y''\left(\frac{\pi}{2}\right) - x''\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) = 0,$$

så er krumningen 0. Dette skyldes, at den ovennævnte udregning svarer til tælleren i krumningsformlen. Hvis tælleren i en brøk er 0 - ja så er det 0.

c. For hvilken værdi af parameteren t er farten lig med nul?

Ingen værdier. Vi skal bruge længden af hastighedsvektoren. Dette svarer til:

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4\cos^2(2t) + \sin^2(t)}.$$

Det letteste for dig til eksamen, når du har svarmuligheder, er at indsætte alle svarmulighederne og nå frem til, at $4\cos^2(2t)+\sin^2(t)$ ikke kan give 0 med de angivne muligheder. En anden er at bruge den trigonometriske lighed

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta.$$

Bruges denne i $4\cos^2(2t) + \sin^2(t)$ fås:

$$4\cos^2(2t) + \sin^2(t) = 4(1 - 2\sin^2 t)^2 + \sin^2(t) = 4(1 + 4\sin^4 t - 4\sin^2 t) + \sin^2 t$$

Reducere dette opnås:

$$16\sin^4 t - 15\sin^2 t + 4,$$

hvilket jo bliver nødt til at være 0, hvis farten skal være 0. Lad $z = \sin^2 t$, da bliver ligningen:

$$16z^2 - 15z + 4 = 0.$$

Hvis vi finder diskriminanten til denne ligning fås:

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 4 = 15^2 - 16^2.$$

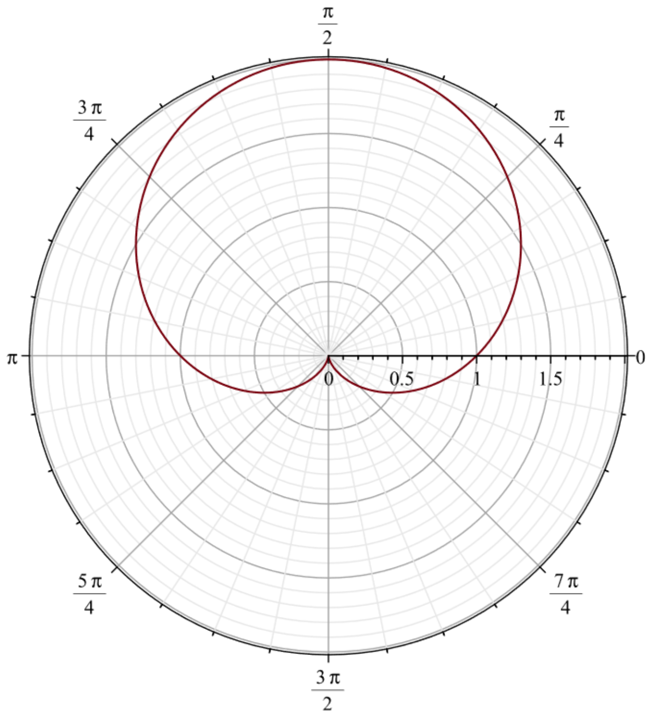
Dette er MINDRE end nul! Det betyder altså, at der skal en kompleks løsning til for at løse dette andengradspolynomium. Så z er et komplekst tal, men $z = \sin^2 t$ kan ikke være et komplekst tal, da t tilhører de reelle tal. Altså findes der ingen løsninger til andengradspolynomiet, og dermed heller ikke nogen mulighed for, at farten er 0.

Opgave 13

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af forskrifterne for f nedenfor svarer til figuren?

$$f(\theta) = \sin(2\theta) + 1, \qquad f(\theta) = \cos(\theta) - 1, \qquad f(\theta) = \sin(\theta) + 1$$

$$f(\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta), \qquad f(\theta) = \sin^2(\theta) - \cos(\theta), \qquad f(\theta) = 2 - \sin(\theta).$$

Svar:

Først aflæses vinklen $\theta = 0$ til en radius på 1. Vi ser nu, hvilket funktioner, der matcher denne beskrivelse:

$$f(0) = \sin(2 \cdot 0) + 1 = 1, \qquad f(0) = \cos(0) - 1 = 0, \qquad f(0) = \sin(0) + 1 = 1$$

$$f(0) = \cos(0)\sin(0) = 0, \qquad f(0) = \sin^2(0) - \cos(0) = -1, \qquad f(0) = 2 - \sin(0) = 2.$$

Der er altså kun 2 funktioner, der opfylder dette kriterium. Jeg aflæser nu $\theta = \frac{\pi}{2}$ til at give værdien 2. Vi indsætter i de to funktioner, der er tilbage:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \sin(\pi) + 1 = 1, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2.$$

Forskriften vi leder efter er altså

$$f(\theta) = \sin(\theta) + 1.$$