Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 14. Januar 2020

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En reel funktion er defineret ved

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y-x^2}}$$

for reelle variable x og y.

a. Bestem definitionsmængden.

For definitionsmængden skal man vide, hvilke værdier af y og x, der er tilladte. Det kan dog oftest være lettere at spørge sig selv: Hvornår er de ikke tilladte!

Det første, vi ser, der kan gå galt, er, at vi måske kan komme til at dividere med nul. Det må vi ikke. Så

$$\sqrt{y-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow y - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq x^2.$$

Opgaven introduceres endvidere med, at f er en **reel** funktion, samt x og y er reelle variable. Derfor kan tælleren, x, ikke være andet end et reelt tal. Vi skal derfor sørge for, at nævneren heller ikke kan være andet end et reelt tal. Vi ved, at kvadratroden af et reelt tal mindre end 0 giver et imaginært tal! Dette giver betingelsen:

$$\sqrt{y-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2.$$

Men første argument sagde, at de ikke måtte være lig hinanden. Derfor er definitionsmængden for f:

$$y > x^2$$

b. Bestem niveaukurven $f(x,y) = 0$.

Vi betragter udtrykket:

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y-x^2}} = 0.$$

Vi ganger med $\sqrt{y-x^2}$ på begge sider og opnår:

$$x = 0.$$

Altså er $x = 0$, og fra opgave a har vi, at $y > x^2 = 0^2 = 0$. Altså er niveaukurven givet ved:

$$x = 0, \; y > 0,$$

hvilket er den positive del af y-aksen.

Opgave 2

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t,\ \frac{1}{3}t^3,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle$$

hvor parameteren t gennemløber alle de reelle tal.

a. Bestem kurvens hastighedsvektor.

Hastighedsvektoren opnås ved at differentiere $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left\langle 1,\ t^2,\ \sqrt{2}t \right\rangle$$

3.0.1 b. Bestem kurvens accelerationsvektor for $t = -1$.

Accelerationsvektoren opnås ved at differentiere hastighedsvektoren, $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \left\langle 0,\ 2t,\ \sqrt{2} \right\rangle$$

Vi indsætter nu $t = -1$:

$$\mathbf{a}(-1) = \left\langle 0,\ 2 \cdot (-1),\ \sqrt{2} \right\rangle = \left\langle 0,\ -2,\ \sqrt{2} \right\rangle$$

c. Bestem kurvens fart.

Dette gøres ved at udregne længden af hastighedsvektoren:

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1^2 + (t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2} = \sqrt{1 + t^4 + 2t^2}.$$

Nu skal vi bruge en kvadratsætning. Nemlig at $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Pt. har vi højre side i dette udtryk, og vi vil gerne opnå den kvadrerede parentes på venstre side, da kvadratroden så vil 'spise' potensen.

Vi prøver at sætte $a = t^2$. Dermed fås højre side til:

$$(t^2)^2 + b^2 + 2t^2 b = t^4 + b^2 + 2t^2 b.$$

Vi sammenligner nu med det, der står i kvadratroden, hvilket gøres ved at sætte de to udtryk lig hinanden:

$$t^4 + b^2 + 2t^2 b = 1 + t^4 + 2t^2.$$

Træk nu t^4 fra på begge sider:

$$b^2 + 2t^2 b = 1 + 2t^2.$$

Vi kan enten finde b ved at udregne det som en andengradsligning eller argumentere kort for det. Jeg tager sidstnævnte. Venstre side siger, at der skal findes et dobbelt produkt, $2t^2b$, som altså indeholder t^2. Men det gør præcis $2t^2$. Så vi kan prøve at sætte disse to led lig hinanden:

$$2t^2b = 2t^2 \Leftrightarrow b = \frac{2t^2b}{2t^2} = \frac{2t^2}{2t^2} = 1.$$

Men for at dette skal passe, så skal $b^2 = 1$, da det er de to tilbageværende led i ligningen. Men hvis $b = 1$ så er også $b^2 = 1$. Vi har altså fundet

$$(t^2 + 1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1.$$

Dermed har vi, at

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + t^4 + 2t^2} = \sqrt{(t^2 + 1)^2} = t^2 + 1.$$

d. Bestem kurvens længde fra $t = 0$ til $t = 3$.

Vi skal blot integrere kurvens fart fra $t = 0$ til $t = 3$:

$$\int_0^3 t^2 + 1\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^3 = \left(\frac{1}{3}3^3 + 3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0\right) = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12.$$

Opgave 3

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 2 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = \pi + 7i.$$

a. Bestem realdelen af e^{iz_3}.

Vi har for $y \in \mathbb{R}$, at $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Vi kan altså lave følgende omskrivning ved brug af potensregneregler og $i^2 = -1$:

$$e^{iz_3} = e^{i(\pi+7i)} = e^{i\pi+7i^2} = e^{i\pi-7} = e^{-7}e^{i\pi} = e^{-7}(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{-7}(-1+0i) = -e^{-7}$$

Realdelen er blot de led af højre siden, som ikke indeholder i. Det vil sige hele højre side. Så realdelen er $-e^{-7}$.

b. Bestem imaginærdelen af e^{iz_3}.

Fra forrige opgave så vi, at $e^{iz_3} = -e^{-7} = -e^{-7} + 0i$. Imaginærdelen er alle de led, der indeholder i (men uden at tage i med). Det vil sige, at imaginærdelen er 0.

c. Bestem $z_1 - z_2$ på polær form.

Vi har, at

$$z_1 - z_2 = (2 - 4i) - (-3 + i) = 2 - 4i + 3 - i = 5 - 5i = 5(1 - i).$$

Jeg foretrækker den sidstnævnte skrivemåde, da dette blot svarer til en skalering på 5. Så jeg skal blot lave mine udregninger for $1 - i$ og gange længden med 5. Først bestemmes modulus ('længden') af $z_1 - z_2$. Husk, at for $z = a + ib$ er modulus givet ved $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$|i + 1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Og dermed er

$$|z_1 - z_2| = 5\sqrt{2}.$$

Modulus her ligger under samme regler som længder af vektorer, hvilket jeg beskriver i mine noter 'Matematisk takt og tone'. Nu mangler vi blot argumentet (vinklen). Argumentet θ er givet ved det θ, som opfylder $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ og $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$, hvor $z = a + ib$. I vores tilfælde kigger vi på $i - 1$, da vi får samme vinkel får komplekse tal, hvor forholdet mellem realdelen og imaginærdelen er ens (så uanset skalering, om den er 1, 5, *pi* eller 123.43543). Altså

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Da det kun er i $-\pi/4$, der går igen i begge, er $\theta = -\pi/4$. I og med at modulus er $|z_1 - z_2| = 5\sqrt{2}$ og argumentet er $\theta = -\pi/4$, fås:

$$z_1 - z_2 = |z_1 - z_2|e^{i\theta} = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Opgave 4

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' - 3y' - 10y = 0.$$

a. Bestem den fuldstændige løsning.

Vi betragter først den karakteristiske ligning:

$$r^2 - 3r - 10 = 0.$$

Denne løses nu for r. Diskriminanten er givet ved

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 = 7^2.$$

Dermed fås

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{7^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2. \end{cases}$$

Da $D > 0$ er løsningen på formen $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, hvilket betyder, at den fuldstændige løsning bliver:

$$y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}.$$

b. Bestem den partikulære løsning $x_p(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = 20t.$$

Vi gætter på, at den partikulære løsning er på formen $x_p(t) = At + B$. Dermed er

$$x_p'(t) = A, \qquad x_p''(t) = 0.$$

Indsættes disse i differentialligningen fås:

$$0 - 3 \cdot A - 10(At + B) = 3A - 10At - 10B = 20t.$$

Grupperer vi i led, der indeholder t og dem, der ikke gør, får vi:

$$(-10A)t + (3A - 10B) = 20t + 0.$$

Jeg smed et $+0$ på for at lette forståelsen. Vi kan nu se, at t-ledene skal være ækvivalente, og dem uden t skal være ækvivalente. Altså

$$-10At = 20t, \qquad 3A - 10B = 0.$$

Kigger vi på første ligning fås:

$$-10At = 20 \Leftrightarrow A = \frac{20t}{-10t} = -2.$$

Smider vi denne værdi for A ind i anden ligning fås:

$$3A - 10B = 3 \cdot (-2) - 10B = -6 - 10B = 0 \Leftrightarrow -10B = 6 \Leftrightarrow B = -\frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Den partikulære løsning bliver da

$$x_p(t) = At + B = -2t + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - 2t.$$

c. Bestem løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) - 3'(t) - 10x(t) = 20t, \quad x(0) = \frac{8}{5}, \quad x'(0) = 10.$$

Kombineres opgave a og b findes $x(t)$:

$$x(t) = y(t) + x_p(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t} - 2t + \frac{3}{5}.$$

Sættes $t = 0$ fås

$$x(0) = c_1 e^{5\cdot 0} + c_2 e^{-2t} - 2 \cdot 0 + \frac{3}{5} = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + \frac{3}{5} = c_1 + c_2 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

på grund af begyndelsesbetingelsen $x(0) = 8/5$. Dette kan omskrives til

$$c_1 + c_2 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1 - c_2.$$

Differentieres $x(t)$ fås:

$$x'(t) = 5c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-2t} - 2.$$

Begyndelsesbetingelsen giver da, at

$$x'(0) = 5c_1 e^{5\cdot 0} - 2c_2 e^{-2\cdot 0} - 2 = 5c_1 \cdot 1 - 2c_2 \cdot 1 - 2 = 5c_1 - 2c_2 - 2 = 10.$$

Vi ved, at $c_1 = 1 - c_2$, hvilket vi så kan indsætte i ovenstående:

$$5(1-c_2) - 2c_2 - 2 = 5 - 5c_2 - 2c_2 - 2 = -7c_2 + 3 = 10 \Leftrightarrow -7c_2 = 7 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{7}{7} = -1.$$

Men så bliver c_1:

$$c_1 = 1 - c_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Løsningen bliver altså:

$$x(t) = 2e^{5t} - e^{-2t} - 2t + \frac{3}{5}$$

Opgave 5

Bestem om følgende udsagn er sandt eller falsk:

a. For funktionen $f(x,y) = \cos^2(e^{x+y})$ gælder, at $f_{xy} = f_{yx}$.

Kort svar: Ja, da det er en kontinuert funktion (f er kompositioner af kontinuerte funktioner, hvorfor f også er kontinuert), der er defineret på en åben disk (hele $\mathbb{R}^2$ i dette tilfælde).

Langt svar: Du kan prøve at differentiere først i forhold til x og så differentiere denne i forhold til y. Derefter kan du gøre det i omvendt rækkefølge, og konkludere, at de afledede er ækvivalente. Jeg orker ikke at gøre det.

b. $\sin^{-1}(\sin(\frac{5\pi}{2})) = \frac{5\pi}{2}$.

Vi ved, at $\sin^{-1}$ har kodomænet $[-\pi/2, \quad \pi/2]$. Så det er kun sandt, hvis $5\pi/2$ ligger i dette område. Men

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

Altså kan $\sin^{-1}$ ikke returnere $\frac{5\pi}{2}$, da dette er uden for kodomænet.

c. $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

Ja, det er en decideret formel, I bør kende (evt. slå op i en formelsamling). Ellers kig på identiteten $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$:

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x) + i\sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x)}{2}.$$

Vi ved også, at $\sin(-y) = -\sin(y)$ samt $\cos(y) = \cos(-y)$. Derfor fås:

$$\frac{\cos(x) + i\sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x)}{2} = \frac{\cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x)}{2} = \frac{2\cos(x)}{2} = \cos(x).$$

d. $y' = x + 2y$ er en separabel differentialligning.

En differentialligning er separabel, hvis den kan skrives på formen $y'(x,y) = p(x) \cdot g(y)$. Altså som et produkt mellem en funktion af x og en funktion af y. Det kan vi ikke, da x og y er lagt sammen, og ikke indgår i samme led.

Opgave 6

Lad $\mathcal{R}$ være området i planen givet ved alle punkter indenfor og på trekanten med hjørnepunkterne $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(1,0)$ og lad f være en funktion defineret på $\mathcal{R}$ givet ved $f(x,y) = xy$.

a. Bestem et par af uligheder, der beskriver koordinater i $\mathbb{R}$.

Lad os se på hjørneværdierne for x i første omgang. De er -1, -1 og 1. Altså -1 og 1 udgør yderpunkterne for x-koordinatet. Så vi siger:

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Det er nok bedst at tegne trekanten først. Men jeg kan se, at der går en 'skrå linje' (hypotenusen) fra $(-1,1)$ til $(1,0)$. Vi bruger udtrykket $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$ til at finde den rette linje mellem de to punkter. Jeg lader her $(x_0, y_0) = (1,0)$ og $(x_1, y_1) = (-1,1)$.

$$y = \frac{1-0}{-1-1}(x-1) + 0 = \frac{1}{-2}(x-1) = -\frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Denne linje er den øvre grænse (tegn punkterne og linjerne og se selv). Altså er $y < -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Vi mangler blot at sige, hvad den nedre grænse er. Men den mindste y-værdier er 0. Derfor har vi:

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

b. Opstil dobbeltintegralet $\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$.

Det inderste integrale er i forhold til y, da denne afhænger af x (hvorfor x skal integreres til sidst). Det inderste integral er da:

$$\int_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} f(x,y)\,dy.$$

Smække r vi det yderste integral på, opnår vi:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Indsættes $f(x,y) = xy$ får vi:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} xy\,dy\,dx.$$

Da x ikke afhænger af y, kan vi tage x uden for det inderste integral:

$$\int_{-1}^{1} x \int_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} y\,dy\,dx.$$

c. Find værdien af integralet i opgave b.

I nedenstående flytter jeg konstanter ud af integralerne for at gøre udregningerne mere simple.

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x \int_{0}^{-\frac{1}{2}(x-1)} y\,dy\,dx &= \int_{-1}^{1} x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \left[y^2\right]_0^{-\frac{1}{2}(x-1)} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \left(\left(-\frac{1}{2}(x-1)\right)^2 - 0^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \left(\frac{1}{2^2}(x-1)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \left(\frac{1}{4}(x^2+1-2x)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x(x^2+1-2x)\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} x^3+x-2x^2\,dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{4}\cdot 1^4+\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{2}{3}\cdot 1^3\right)-\left(\frac{1}{4}(-1)^4+\frac{1}{2}(-1)^2-\frac{2}{3}(-1)^3\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{4\cdot 2}\frac{4}{3} \\
&= -\frac{4}{3\cdot 4\cdot 2} \\
&= -\frac{1}{3\cdot 2} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Opgave 7

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne mmed koordinater (x, y), som opfylder uligheder $x^2 + y^2 \leq 2$ og $y \geq 0$. Funktionen f er defineret på $\mathcal{R}$ og givet ved $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

a. Beskriv området $\mathcal{R}$.

Af $x^2 + y^2 \leq 2$ kan vi se, at den øverste grænse er $x^2 + y^2 = 2$. Men dette svarer til cirklens ligning $x^2 + y^2 = r^2$, som er en cirkel med centrum i origo, $(0, 0)$, og radius r. Altså er radius

$$r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}.$$

At $y \geq 0$ fortæller, at cirklen kun må være i det positive halvplan og ikke det negative. Men så bliver cirklen pludseligt også en halvcirkel, da den har centrum i origo. Altså har vi med en øvre halvcirkel med radius $\sqrt{2}$ og centrum i origo.

b. Bestem de indre kritiske punkter for $f(x, y)$.

Vi finder f_x og f_y. Vi får ved brug af kædereglen:

$$f_x(x, y) = (-2x)e^{-(x^2+y^2)}, \qquad f_y(x, y) = (-2y)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Husk kædereglen siger den indre funktion, $-(x^2 + y^2)$, differentieret.[1] Dette ganges dernæst på den ydre funktion e^z differentieret i forhold til z. Bemærk, at z er en 'stedfortræder' for den indre funktion.

Indre kritiske punkter findes nu ved at finde de punkter, der opfylder både $f_x(x, y) = 0$ og $f_y(x, y) = 0$:

$$f_x(x, y) = (-2x)e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

Funktionen, e^z, kan aldrig blive 0, derfor kan $e^{-(x^2+y^2)}$ heller ikke blive 0. Altså skal er det kun den anden faktor, der kan sørge for, at f_x bliver nul. Altså

$$-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Samme argument bruges om y og f_y. Så x skal bare være 0 for den ene ligning, og y skal bare være 0 for den anden ligning. Altså er det eneste kritiske punkt $(0, 0)$.

MEN $(0, 0)$ er ikke et INDRE punkt, uanset om det er kritisk eller ej. Det ligger på randen, da linjen $y = 0$ udgør den nedre rand for halvcirklen. Randpunkter er ikke indre punkter! Altså er der ingen indre kritiske punkter. Vi ved til gengæld ikke, om der er andre kritiske punkter PÅ randen.

c. Hvad er den minimale værdi af f på $\mathcal{R}$?

Vi er heldige i vores situation, da vi ved, at x^2+y^2 maksimalt kan være 2. Derudover så minimeres $e^{-(x^2+y^2)}$, når $x^2 + y^2$ maksimeres (eftersom der er et minus foran i potensen). Da $x^2 + y^2$ er maksimalt 2, så er $e^{-(x^2+y^2)}$ minimal, når $x^2 + y^2 = 2$, hvorfor e^{-2} er den mindste værdi.

[1] Gang minus ind i parentesen for at undgå forvirring. Hvis vi differentierer i forhold til x, så betragtes y som en konstant.

Opgave 8

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = \sin(\pi xyz^{3/2}).$$

a. Bestem gradientvektoren $\nabla F(P)$ i punktet $P = (-1, -1, 1)$.

Gradientvektoren er F givet ved

$$\nabla F(x, y, z) = [F_x(x, y, z), \quad F_y(x, y, z), \quad F_z(x, y, z)].$$

Vi differentierer altså ved brug af kædereglen og får:

$$F_x(x, y, z) = (\pi yz^{3/2}) \cdot \cos(\pi xyz^{3/2}),$$

hvor $(\pi yz^{3/2})$ er den indre funktion differentieret, og $\cos(\cdot)$ er den ydre funktion differentieret. Tilsvarende får vi for F_y og F_z:

$$F_y(x, y, z) = (\pi xz^{3/2}) \cdot \cos(\pi xyz^{3/2}), \qquad F_z(x, y, z) = \left(\pi xy\frac{3}{2}z^{1/2}\right) \cdot \cos(\pi xyz^{3/2})$$

Vi indsætter nu punktet P i de 3 funktioner:

$$F_x(P) = (\pi \cdot (-1) \cdot 1^{3/2}) \cdot \cos(\pi \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1^{3/2}) = -\pi \cdot \cos(\pi) = -\pi \cdot (-1) = \pi$$

$$F_y(P) = (\pi \cdot (-1) \cdot 1^{3/2}) \cdot \cos(\pi \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1^{3/2}) = -\pi \cdot \cos(\pi) = -\pi \cdot (-1) = \pi$$

$$F_y(P) = (\pi \cdot (-1) \cdot (-1)\frac{3}{2}1^{1/2}) \cdot \cos(\pi \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1^{3/2}) = \frac{3}{2}\pi \cdot \cos(\pi) = \frac{3}{2}\pi \cdot (-1) = -\frac{3}{2}\pi.$$

Derfor fås gradientvektoren i punktet P:

$$\nabla F(P) = \left[\pi, \quad \pi, \quad -\frac{3}{2}\pi\right].$$

b. Bestem en ligning til tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (-1, -1, 1)$.

Tangentplanet i et punkt P er givet ved:

$$\nabla F(P) \cdot \begin{bmatrix} x - P_x \\ y - P_y \\ z - P_z \end{bmatrix} = 0,$$

eller skrevet på en anden måde:

$$F_x(P) \cdot (x - P_x) + F_y(P) \cdot (y - P_y) + F_z(P) \cdot (z - P_z) = 0.$$

Vi får altså tangentplanets ligning til:

$$\pi(x - (-1)) + \pi(y - (-1)) - \frac{3}{2}\pi(z - 1) = \pi(x + 1) + \pi(y + 1) - \frac{3}{2}\pi(z - 1) = 0.$$

For at gøre ligningen lidt pænere, ganger vi med 2 på begge sider. Og ligeledes dividerer vi med π, da dette fremtræder i alle led (bortset fra nul på den højre side, men principielt kan vi skrive $0 = 0\pi$):

$$2(x+1) + 2(y+1) - 3(z-1) = 0$$

Vi ganger nu ind i parenteserne:

$$2x + 2 + 2y + 2 - 3z + 3 = 2x + 2y - 3z + 7 = 0$$

Lægger vi $3z$ til på begge sider får vi ligningen:

$$3z = 2x + 2y + 7,$$

hvilket nok er den pæneste ligning.

c. Bestem den partielle afledede $\frac{\partial z}{\partial x}$ i punktet $P = (-1, -1, 1)$.

Vi har som følge af implicitfunktionssætningen, at

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)},$$

hvilket giver os:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -\frac{\pi}{-\frac{3}{2}\pi} = \frac{2}{3}.$$

NOTE: Hvis du ikke helt forstår brøkrokeringen, så er denne udregning måske bedre:

$$-\frac{\pi}{-\frac{3}{2}\pi} = \frac{-\pi}{-\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}.$$

Opgave 9

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

for alle reelle tal x og y. Lad $\mathcal{R}$ være området i planen bestående af alle punkter (x, y), som opfylder uligheden $x^2 + y^2 \leq 1$.

a. Er det sandt, at $\nabla f(0,0) = [0,\ \ 0]$?

Det vides, at $\nabla f(P) = [f_x(P),\ \ f_y(P)]$. Vi finder f_x og f_y ved brug af kædereglen. Jeg kan dog bedst lide at omskrive rødder til potenser, så $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$. (Dermed er den ydre funktion $z^{\frac{1}{2}}$, hvilket er sjovere at differentiere end kvadratrødder. Synes jeg.)

$$f_x(x, y) = 2x \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Tilsvarende for y:

$$f_y(x, y) = 2y \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vi har altså $\sqrt{x^2+y^2}$ i nævneren af en brøk. Indsættes punktet $(0,0)$, dividerer du pludseligt med 0. Det mås (tøhø) man ikke, og derfor er $\nabla f(0,0)$ ikke defineret. Hvilket også betyder, at det ikke er sandt.

b. Er det sandt, at $\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA \geq 2$.

Det er sandt. Det er hurtigt at se, hvis vi kigger på polære koordinater. Vi har, at $\mathcal{R}$ er punkterne i og på enhedscirklen. Derfor er $0 \leq r \leq 1$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Derudover, da $x^2 + y^2 = r^2$, har vi, at $f(\theta, r) = \sqrt{r^2} = r$. Det betyder, at den polære integration bliver:

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot r\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\, d\theta\, dr = \int_0^1 2\pi r^2\, d\theta\, dr.$$

Endvidere fordi 2π er en konstant, kan vi sætte det uden for integralet:

$$\int_0^1 2\pi r^2\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 r^2\, d\theta\, dr = 2\pi \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{3}.$$

Okay, så vi ved (det burde vi i hvert fald fra folkeskolen, $\pi \approx 3.14$), at $\pi \geq 3$[2]. Derfor har vi, at

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \geq 2 \cdot 3\frac{1}{3} = 2.$$

[2] Nogle bliver forvirret over $\pi \geq 3$, men husk, at det bare betyder, at π er 3 eller større, hvilket altid er sandt.

c. Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Vi skal finde:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u},$$

hvorfor opgave a giver os:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2}}\right] \cdot \mathbf{u} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\right] \cdot \mathbf{u} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cdot \mathbf{u},$$

Nu prikker vi blot de to vektorer:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(P) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{4} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

d. Bestem den partielle afledede f_{xy}.

Jeg stjæler følgende fra opgave a:

$$f_x(x, y) = x \cdot \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Vi differentierer denne i forhold til y med kædereglen og får da:

$$f_{xy}(x, y) = x \cdot \left(-\frac{1}{2} 2y\right) \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -xy \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}.$$

Opgave 10

En funktion er givet ved

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

for alle reelle tal $x > 0$.

a. Bestem den dobbelt afledede af f.

Jeg omskriver

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x} = 2\ln(x) \cdot x^{-1}.$$

Da $(\ln(x))' = \frac{1}{x} = x^{-1}$ og $(x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, får vi med produktreglen, at:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2\ln(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2} = (2 - 2\ln(x)) \cdot x^{-2}.$$

Differentieres x^{-2} fås $-2x^{-3}$. Produktreglen gør, at vi kan genbruge tidligere udregninger:

$$f''(x) = \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + (2 - 2\ln(x)) \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2}{x^3} - \frac{4 - 4\ln(x)}{x^3} = -\frac{2}{x^3} + \frac{4\ln(x) - 4}{x^3} = \frac{4\ln(x) - 6}{x^3}$$

b. Bestem anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunktet $a = 1$.

Taylor polynomiet af orden 2 omkring a er givet ved:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2.$$

Vi husker, at $\ln(1) = 0$:

$$f(1) = \frac{2\ln(1)}{1} = 0, \quad f'(1) = \frac{2 - 2\ln(1)}{1^2} = \frac{2 - 0}{1} = 2, \quad f''(1) = \frac{4\ln(1) - 6}{1^3} = \frac{0 - 6}{1} = -6$$

Dermed er

$$P_2(x) = 0 + 2(x-1) - \frac{1}{2} \cdot 6(x-1)^2 = 2x - 2 - 3(x^2 + 1 - 2x) = 2x - 2 - 3x^2 - 3 + 6x = -3x^2 + 8x - 5.$$

Opgave 11

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = \cos(t),$$
$$y(t) = \sin(2t)$$

for alle reelle tal $t \geq 0$.

a. Bestem den mindste værdi af parameteren t, hvor kurven går gennem punktet $(-1, 0)$.

Vi har, at $\cos(t) = -1$, når t er $\pi,\ 3\pi, \dots, (2k+1)\pi$, hvor $k \in \mathbb{N}$. Tilsvarende ved vi, at $\sin(t) = 0$, når t er $0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$. Altså er den mindste værdi af t, som opfylder begge, π.

b. Hvad er værdien af krumningen, når $t = \frac{\pi}{2}$?

Vi finder først de afledede og dobbelt afledede:

$$x'(t) = -\sin(t), \qquad x''(t) = -\cos(t), \qquad y'(t) = 2\cos(2t), \qquad y''(t) = -2\sin(2t).$$

Krumningen er givet ved:

$$\frac{|x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}.$$

Jeg fokuserer først på tælleren (hvis vi er heldige, den er nul, så slipper vi for en masse skrivearbejde).

$$|-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)| = |-1 \cdot (-2 \cdot 0) + 0\,(2(-1))\,| = 0$$

Fordi tælleren er 0, så er hele brøken 0. - MEEEEEEN vi skal lige sikre os, at nævneren ikke er nul. Så vi skal have mindst en af følgende kriterier opfyldt: $x'(t) \neq 0$ eller $y'(t) \neq 0$. Vi tjekker:

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Vi behøver ikke udregne $y'(\pi/2)$, da vi allerede nu ved, at nævneren ikke er 0. Derfor ved vi, at krumningen er 0.

c. Hvad er kurvens krumning i punktet $(-1, 0)$.

Punktet $(-1, 0)$ svarer til $t = \pi$. Vi bruger samme metode som før:

$$x'(\pi) = -\sin(\pi) = 0, \;\; x''(\pi) = -\cos(\pi) = 1, \;\; y'(\pi) = 2\cos(2\pi) = 2, \;\; y''(\pi) = -2\sin(2\pi) = 0.$$

$$\frac{|0 \cdot 0 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{(0)^2 + (2)^2}^3} = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Opgave 12

Betragt følgende første ordens differentialligning

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -x^2,$$

for alle $x > 0$.

a. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Vi har, at

$$y'(x) + p(x)y = g(x),$$

hvor $p(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = -x^2$. Løsningen er givet ved

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)g(x)\,dx - c \right),$$

hvor $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$. Vi udregner først $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln(x)} = x.$$

Dermed er

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\int x \cdot (-x^2)\,dx + c\right) = \frac{1}{x}\int -x^3\,dx = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{4}x^4 + c\right) = -\frac{1}{4}x^3 + c\frac{1}{x}.$$

b. Bestem løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -x^2, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Vi indsætter i vores fuldstændige løsning:

$$y(1) = -\frac{1}{4}\cdot 1^3 + c\frac{1}{1} = -\frac{1}{4} + c = \frac{1}{2}.$$

Altså er

$$c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Løsningen er da

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}\frac{1}{x} = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4x}.$$