Besvarelser til Calculus
Ordinær eksamen - Forår - 6. Juni 2016

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen givet ved

$$y'' + 2y' + 26y = 0.$$

Svar:

Vi opstiller først den karakteristiske ligning:

$$r^2 + 2r + 26 = 0.$$

Vi finder nu diskriminanten til denne andengradsligning og får

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 4 - 4 \cdot 26 = 4(1 - 26) = 4 \cdot (-25) = -100 = (10i)^2.$$

Som det ses er determinanten -100, hvilket vi kan omskrive til $(10i)^2$, hvilket er praktisk i forhold til formlen for løsningerne af andengradsligningen:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Vi får altså ved indsættelse, at

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{(10i)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 10i}{2} = -1 \pm 5i.$$

Den karakteristiske ligning har altså rødderne $-1 \pm 5i$. Vi kan derfor benytte formlen for den fuldstændige løsning i tilfælde af komplekse rødder på formen $\alpha \pm \beta i$, nemlig:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Vi har altså fra vores komplekse rødder, at $\alpha = -1$ og $\beta = 5$, og dermed er den fuldstændige løsning:

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(5t) + c_2 e^{-t} \sin(5t).$$

Opgave 2

Det oplyses, at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

kan angives som

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t,$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter.

a. Hvad giver $y(0)$?

Vi indsætter blot 0 på t's plads i

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t,$$

og vi får dermed:

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = c_1 \cdot 1 = c_1.$$

b. Hvad giver $y'(0)$?

Vi differentierer først $y(t)$ givet i opgaveteksten. Vi kan differentiere $c_1 e^t$ og $c_2 t e^t$ hver for sig. Vi har, at

$$(c_1 e^t)' = c_1 e^t,$$

da c_1 er en konstant og $(e^t)' = e^t$. For $c_2 t e^t$ bruges produktreglen

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Vi får med $f = c_2 t$ og $g = e^t$, at

$$(c_2 t e^t)' = (c_2 t)' \cdot e^t + c_2 t \cdot (e^t)' = c_2 e^t + c_2 t e^t,$$

og dermed[1]

$$y'(t) = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t = e^t(c_1 + c_2 + c_2 t) = e^t(c_1 + c_2(1 + t)).$$

Indsættes 0 på t's plads i ovenstående opnås:

$$y'(0) = e^0(c_1 + c_2(1 + 0)) = 1(c_1 + c_2 \cdot 1) = c_1 + c_2.$$

[1]Hvis du er usikker på omskrivningerne efter det andet $=$, så fortvivl ej, disse er ikke nødvendige. - Dog nødvendige for at følge med efterfølgende.

c. Begyndelsesværdiproblemet

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4,$$

har en entydig løsning $y(t)$. Find denne løsning og angiv derefter funktionsværdien $y(1)$.

Vi nu har fået oplyst, at $y(0) = 1$, og $y'(0) = 4$. Vi fandt i opgave a, at $y(0) = c_1$. Dermed er

$$y(0) = c_1 = 1.$$

Vi har også fra opgave b, at $y'(0) = c_1 + c_2$. Da vi ved, at $c_1 = 1$, får vi nu, at

$$y'(0) = c_1 + c_2 = 1 + c_2 = 4 \Leftrightarrow c_2 = 3.$$

Vi får altså, at

$$y(t) = e^t + 3te^t,$$

og dermed

$$y(1) = e^1 + 3 \cdot 1 \cdot e^1 = e + 3e = 4e.$$

Opgave 3

En funktion er defineret ved
$$f(x) = x\cos(x).$$

a. Find den dobbelt afledede $f''(x)$.

Vi differentierer først $f(x)$ ved brug af produktreglen, at
$$f'(x) = (x)' \cdot \cos(x) + x(\cos(x))' = \cos(x) + x(-\sin(x)) = \cos(x) - x\sin(x).$$

Nu kan vi så differentiere $f'(x)$ ledvist og ved brug af produktreglen for andet led og opnå:
$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos(x))' + (-x)' \cdot \sin(x) - x \cdot (\sin(x))' \\ &= -\sin(x) - \sin(x) - x \cdot \cos(x) \\ &= -2\sin(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

b. Find Taylor polynomiet af orden 2 for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$.

Et n'te ordens Taylor polynomium findes ved
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Vi sætter altså $n = 2$. Vi har givet $f(x)$, og fra Opgave a har vi allerede fundet $f'(x)$ og $f''(x)$, og vi kan nu finde funktionsværdierne for disse i punktet $x = a = 0$ og får:
$$f(0) = 0\cos(0) = 0, \quad f'(0) = \cos(0) - 0\sin(0) = 1, \quad f''(0) = -2\sin(0) - 0\cos(0) = 0.$$

Vi kan nu opstille P_2:
$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i,$$

og udskrives summen opnås
$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &= 0 + x + \frac{0}{2}x^2 \\ &= x. \end{aligned}$$

Husk, at $0! = 1$, $1! = 1$ og $2! = 1 \cdot 2 = 2$.

Opgave 4

En kurve er givet ved

$$\begin{aligned} x &= \cos(t), \\ y &= 2\sin(t), \\ z &= t, \end{aligned}$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal. Find buelængden af kurven for $t = 0$ til $t = \pi$.

Svar:

Vi skal bruge formlen

$$\text{buelængde} = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt,$$

hvor a og b er henholdsvis start- og slutpunkt af den del af kurven, man "måler". Vi ser i formlen, at vi skal bruge de afledede funktioner x', y' og z', vi får altså:

$$x'(t) = -\sin(t), \quad y'(t) = 2\cos(t), \quad z'(t) = 1.$$

Vi indsætter i formlen og får, at

$$\int_a^b \sqrt{(-\sin(t))^2 + (-2\cos(t))^2 + (1)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 1^2}\, dt$$

Vi vil gerne kunne bruge idiotformlen, $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, og derfor splitter vi i ovenstående $4\cos^2(t)$ op til $\cos^2(t) + 3\cos^2(t)$ og får:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 3\cos^2(t) + 1}\, dt &= \int_a^b \sqrt{1 + 3\cos^2(t) + 1}\, dt \\ &= \\ &= \int_a^b \sqrt{3\cos^2(t) + 2}\, dt. \end{aligned}$$

Opgaven fortæller os, at vi skal finde buelængden for $t = 0$ til $t = \pi$, hvilke vi altså indsætter på hhv. a og b's plads:

$$\int_0^\pi \sqrt{3\cos^2(t) + 2}\, dt.$$

Dermed er det ønskede integrale, der repræsenterer buelængden, fundet.

Opgave 5

En plan kurve er givet ved

$$x = \sin(t),$$
$$y = t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

a. Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 0$?

Vi indsætter blot 0 på t's plads og får

$$P_0 = (x(0), y(0)) = (\sin(0), 0^2) = (0, 0).$$

b. Hvad er krumningen af kurven for $t = 0$?

Vi skal bruge formlen

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}.$$

Derfor kræver det, at vi finder første- og andenordens afledede for x og y:

$$x'(t) = \cos t, \quad x''(t) = -\sin t, \quad y'(t) = 2t, \quad y''(t) = 2.$$

Indsættes i formlen fås

$$\kappa(t) = \frac{|\cos(t) \cdot 2 - (-\sin t) \cdot 2t|}{\sqrt{(\cos t)^2 + (2t)^2}^3} = \frac{|\cos(t) \cdot 2 + \sin(t) \cdot 2t|}{\sqrt{(\cos t)^2 + (2t)^2}^3}.$$

Sættes $t = 0$ opnås:

$$\kappa(0) = \frac{|\cos(0) \cdot 2 + \sin(0) \cdot 2 \cdot 0|}{\sqrt{(\cos 0)^2 + (2 \cdot 0)^2}^3} = \frac{|2 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}^3} = \frac{2}{1} = 2.$$

Opgave 6

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2x + y}.$$

a. Find definitionsmængden.

Funktionen $f(x,y)$ giver ikke mening, hvis nævneren er lig med 0, da vi ikke må dividere med 0, hvilket vil sige, at

$$2x + y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -2x.$$

b. Hvilken form har niveakurven $f(x,y) = 2$?

Vi betragter $f(x,y) = 2$, hvilket vil sige

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2x + y} = 2.$$

Dette kan omskrives ved at gange med nævneren på begge sider:

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{2x + y} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 = 2(2x + y).$$

Altså er

$$x^2 + y^2 + 1 = 4x + 2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 4x - 2y = 0. \tag{7.1}$$

Vi husker nu kvadratsætningen $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Vi kan prøve at identificere x med a, dvs $2ab = 2xb$ skal relateres til leddet $-4x$, altså fås:

$$2xb = -4x \Leftrightarrow b = -2.$$

Vi ser, at

$$(x-2)^2 = x^2 + 4 - 4x.$$

Gøres det tilsvarende for $(y+c)^2$ fås

$$2yc = -2y \Leftrightarrow c = -1,$$

og ydermere

$$(y-1)^2 = y^2 + 1 - 2y.$$

Betragt nu igen (7.1) og læg 4 til på begge sider, så fås:

$$x^2 + y^2 + 1 - 4x - 2y + 4 = (x^2 + 4 - 4x) + (y^2 + 1 - 2y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Dette er præcis cirklens ligning, og vi aflæser centrum til $(2,1)$, og da $r^2 = 4$ er radius $r = 2$.

Opgave 7

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = \sin(x^3 + x^2y + y^2 - 1).$$

a. Hvad giver funktionsværdien $f(1,-1)$?

Vi sætter blot $x = 1$ og $y = -1$ i ovenstående funktion:

$$f(1,-1) = \sin(1^3 + 1^2 \cdot (-1) + (-1)^2 - 1) = \sin(1 - 1 + 1 - 1) = \sin(0) = 0.$$

b. Find den partielle afledede $f_x(x,y)$.

Vi benytter her kædereglen, som siger, at "differentialet er den indre funktion differentieret ganget den ydre funktion differentieret", eller skrevet mere matematisk

$$(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Lader vi $g(h(x)) = \sin(h(x))$, så $h(x) = (x^3 + x^2y + y^2 - 1)$. Sinus differentieret giver cos, altså bliver

$$g'(h(x)) = \cos(h(x)) = \cos(x^3 + x^2y + y^2 - 1).$$

Differentieres $h(x)$ i forhold til x fås:

$$h'(x) = 3x^2 + 2xy.$$

Dermed giver kædereglen os, at

$$f_x(x,y) = (g(h(x)))' = (3x^2 + 2xy)\cos(x^3 + x^2y + y^2 - 1).$$

Opgave 8

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3xy - 8x + 5y + 1.$$

a. Hvilket af følgende punkter er et kritisk punkt for f?

Vi differentierer først $f(x,y)$ i forhold til både x og y og får:

$$f_x(x,y) = 2x + 3y - 8, \qquad f_y(x,y) = -4y + 3x + 5.$$

Et punkt (x_1, y_1) er et kritisk punkt, hvis både $f_x(x_1,y_1) = 0$ og $f_y(x_1,y_1) = 0$. Vi isolerer først x i $f_x(x,y) = 0$ og får:

$$f_x(x,y) = 2x + 3y - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3y + 8 \Leftrightarrow x = \frac{-3y+8}{2}.$$

Dette kan vi så indsætte på x's plads i ligningen $f_y(x,y) = 0$, og dermed:

$$-4y + 3x + 5 = -4y + 3\frac{-3y+8}{2} + 5 = 0 \Leftrightarrow -8y + 3(-3y+8) + 10 = -17y + 34 = 0.$$

Vi har blot ganget hver side med 2 i ovenstående sidste omskrivning. Nu isoleres y i ovenstående, og vi får:

$$-17y + 34 = 0 \Leftrightarrow 17y = 34 \Leftrightarrow y = 2.$$

Vi kan nu indsætte denne værdi for y i udtrykket for x. Vi finder, at

$$x = \frac{-3 \cdot 2 + 8}{2} = \frac{-6+8}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Altså er $(1,2)$ et kritisk punkt.

b. Bestem den retningsafledede $D_u f(P)$ i punktet $P = (1,1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $u = -\frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Fra opgave a. kender vi gradientvektoren

$$\nabla f(x,y) = (2x + 3y - 8, -4y + 3x + 5).$$

Indsættes punktet $P = (1,1)$ i denne fås:

$$\nabla f(P) = f(1,1) = (2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 8, -4\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5) = (2+3-8, -4+3+5) = (-3,4).$$

Skalarproduktet(/prikproduktet) mellem $D_u f(P)$ og u giver da, at

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u = (-3,4) \cdot \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = -3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{5} + \frac{12}{5} = \frac{24}{5}.$$

Opgave 9

En flade i rummet $\mathcal{F}$ er bestemt ved $F(x,y,z)=0$, hvor

$$F(x,y,z)=e^x+y^2+z^3-6.$$

Fladen $\mathcal{F}$ har en tangentplan i punktet $P=(0,2,1)$. Find ligningen for denne.

Svar:

Vi differentierer først $F(x,y,z)$ i forhold til x,y og z:

$$F_x(x,y,z)=e^x,\quad F_y(x,y,z)=2y,\quad F_z(x,y,z)=3z^2.$$

Indsættes punktet $P=(0,2,1)$ i disse fås:

$$F_x(0,2,1)=e^0=1,\quad F_y(0,2,1)=2\cdot 2=4,\quad F_z(0,2,1)=3\cdot 1^2=3.$$

(Bemærk: Allerede nu, er det muligt at aflæse svaret i multiple choice opgaven, men vi fortsætter udregningen.) Da P er et punkt med tangentplan, må $F(P)=0$, men vi regner lige efter for en sikkerheds skyld:

$$F(P)=F(0,2,1)=e^0+2^2+1^3-6=1+4+1-6=0.$$

Vi kan nu opstille ligningen for tangenten ved brug af

$$F_x(P)(x-P_x)+F_y(P)(y-P_y)+F_z(P)(z-P_z)+F(P)=0,$$

og hvilket bliver

$$1(x-0)+4(y-2)+3(z-1)+0=x+4y-8+3z-3=x+4y+3z-11=0.$$

Lægges 11 til på begge sider, så får vi ligningen

$$x+4y+3z=11,$$

hvilket er en måde at skrive løsningen på.

Opgave 10

Et område $\mathcal{R}$ i planen er beskrevet ved de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq y.$$

Bestem værdien af planintegralet

$$\int\int_{\mathcal{R}} \left(x^2 + y^2\right)^3 \, dA.$$

Svar:

Vi vil for at minimere udregningerne benytte polær integration.

Cirklens ligning for en cirkel med centrum i origo, $(0, 0)$, er

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

hvoraf vi fra den første ulighed i opgaven kan aflæse, at $r^2 \leq 1$, hvilket betyder, at $r \leq 1$.
Af den anden ulighed kan vi se, at vi kun skal have den øverste del af cirklen med, dvs. halvcirklen, der går fra 0 radianer til π radianer.[2] Vi har altså de polære grænser:

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

da r ikke kan være negativ og dermed mindst 0.
Når man skal omskrive et kartesisk integral til et polært, så skal man huske at gange r på inde i selve integralet, og husk desuden, at $x = r\cos\theta$, og $y = r\sin\theta$. Dette giver

$$\int\int_{\mathcal{R}} \left(x^2 + y^2\right)^3 \, dA = \int_0^\pi \int_0^1 \left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right)^3 r \, dr \, d\theta.$$

Bruger vi idiotformlen, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, får vi

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_0^1 \left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right)^3 r \, dr \, d\theta &= \int_0^\pi \int_0^1 \left(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)\right)^3 r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 \left(r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))\right)^3 r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 \left(r^2\right)^3 r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 r^{2\cdot 3} r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 r^7 \, dr \, d\theta.
\end{aligned}$$

Vi kan nu udregne integralet på helt normal vis

$$\int_0^\pi \int_0^1 r^7 \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{8}r^8\right]_0^1 d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{8}1^8 \, d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{8} \, d\theta = \left[\frac{1}{8}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}.$$

[2] Der er 2π på en cirkel, dvs. $360° = 2\pi \Leftrightarrow \pi = 180°$.

Opgave 11

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{3+i}{1+2i} + 7 - i, \quad z_2 = 5e^{3\pi i}.$$

Hvad giver z_1 skrevet på standard form?

Vi behandler først brøken. Vi vil gerne have i væk fra nævneren. Dette gøres ved at forlænge brøken med den kompleks konjugerede til nævneren, dvs. gange $1 - 2i$ på i tælleren og nævneren.[3] Vi får:

$$z_1 = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + 7 - i = \frac{3 - 6i + i + 2}{1^2 + 2^2} + 7 - i = \frac{5-5i}{5} + 7 - i.$$

- Hvis ovenstående gik for stærkt i nævneren, så tjek evt. fodnoten, hvis du ikke har gjort dette.
Da der står 5 i alle led i tælleren og kun et 5-tal i nævneren, går disse 5'ere ud, og vi får, at

$$z_1 = \frac{5-5i}{5} + 7 - i = 1 - i + 7 - i = 8 - 2i.$$

Hvad giver z_2 skrevet på standard form?

Da $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, får vi, at

$$z_2 = 5e^{3\pi i} = 5(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi) = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 5(-1 + i0) = -5.$$

Bemærk, at vi har brugt, at $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, og $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$, da vi kan skrive $\cos(3\pi) = \cos(\pi + 2\pi)$ og tilsvarende for sinus. Grunden til, at $+2\pi$ er "ligegyldig"er, at det for sinus og cosinus svarer til at gå en hel omgang rundt i cirklen, og man lander derfor i samme punkt.

[3] Da vi med en kvadratsætning har, at $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$, som ikke afhænger af i for $a, b \in \mathbb{R}$.

Opgave 12

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 - 2x, \quad 0 \leq z \leq 3x.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = x + 1$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m.

Første integral

$$m = \int_0^{2-2x} \int_0^1 \int_0^{3x} (x+1)\, dz\, dx\, dy$$

Et problem, der falder i øjnene, er, at det yderste integral har en øvre grænse, som afhænger af x. Dermed bliver massen en variabel, der afhænger af x - men denne bør være konstant, da området ikke ændrer sig!

Andet integral

$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2+x} (x+1)\, dz\, dy\, dx$$

Vi ser, at det inderste integral har forkert øvre grænse, da $0 \leq z \leq 3x$.

Tredje integral

$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3x} (x+1)\, dz\, dy\, dx$$

Vi ser her, at grænserne passer, og dette giver et konstant tal.

Fjerde integral

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{3x} dz\, dx\, dy$$

Her er blot ændret på integrationsrækkefølgen af x og y. Da $0 \leq x \leq 1$ er $0 \leq y \leq 2$. Desuden er $0 \leq y \leq 2 - 2x \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 - y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2-y}{2}$, hvilket er grænserne.

Femte integral

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-y} \int_0^{3x} dz\, dx\, dy$$

Da den øvre grænse for det midterste integral er det eneste, der er ændret ifht. "Fjerde integral", og da $\frac{2-y}{2} = 1 - \frac{y}{2} \neq 1 - y$, er denne falsk.

Opgave 13

a. Kan punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (2, -2)$ angives i polære koordinater med $(r, \theta) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$?

Relationen mellem rektangulære og polære koordinater ses gennem $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Vi ser altså, at

$$x = 2\sqrt{2}\cos(\pi/2) = 2\sqrt{2} \cdot 0 = 0.$$

Da x-koordinaten ikke stemmer over ens med radius og vinkel, kan vi svare nej til spørgsmålet.

b. Lad D være området i planen bestående af de punkter, som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskriften

$$f(x, y) = \frac{2x}{x + y + 1}$$

og definitionsmængde D. Antager f et globalt maksimum?

Ja, da f er defineret på hele D, og D er lukket (da $\leq$ og ikke $<$) og begrænset (da x og y ikke kan gøres uendeligt store eller uendeligt små, begrænset af 0 og 1).

c. Lad D være området i planen bestående af de punkter, som opfylder ulighederne $0 < x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskriften

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

og definitionsmængde D. Antager f et globalt maksimum?

Nej! Hvis vi betragter $y = 0$ er funktionen $1/x$. Jo tættere vi lader x komme på 0, des større bliver funktionen. Der er altså ikke en øvre grænse.

d. For ethvert reelt tal b har følgende ligning i den ubekendte x netop én løsning:

$$\arctan(x) = b.$$

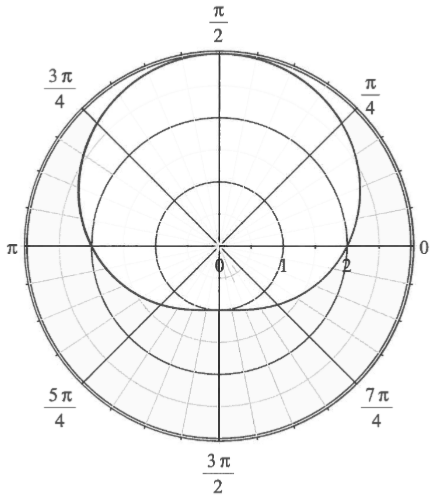
Dette er ikke sandt, da arctan har værdimængde $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, hvilket vil sige, at der ikke findes en løsning til $b > \frac{\pi}{2}$ eller $b < -\frac{\pi}{2}$.

Opgave 14

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$$f(\theta) = 3 - \cos\theta, \quad f(\theta) = 2 - \cos\theta, \quad f(\theta) = 2 + \sin\theta$$

$$f(\theta) = 1 + \sin\theta, \quad f(\theta) = 2\sin\theta, \quad f(\theta) = 3\cos(2\theta).$$

Svar:

Vi bruger udelukkelsesmetoden til at finde den rigtige funktion. Vi ser, at funktionen har radius 2 for $\theta = 0$. Vi indsætter altså i hver af funktionerne og får:

$$f(0) = 3-\cos 0 = 3-1 = 2, \; f(0) = 2-\cos 0 = 2-1 = 1, \; f(0) = 2+\sin 0 = 2+0 = 2$$

$$f(0) = 1+\sin 0 = 1+0 = 1, \quad f(0) = 2\sin 0 = 2\cdot 0 = 0, \quad f(0) = 3\cos(2\cdot 0) = 3\cdot 1 = 3.$$

Vi ser, at der kun er 2 funktioner, der passer på $\theta = 0$ giver en radius på 2, nemlig $f(\theta) = 3-\cos\theta$ og $f(\theta) = 2+\sin\theta$. Vi ser igen på figuren og bemærker, at $\theta = \frac{\pi}{2}$ giver en radius på 3. Vi indsætter derfor denne vinkel i de to tilbageværende funktioner:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 0 = 3, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$$

De giver begge det samme, så vi må prøve en ny vinkel! Figuren viser, at $\theta = \pi$ giver en radius på 2, og gør som før:

$$f(\pi) = 3 - \cos\pi = 3 - (-1) = 4, \quad f(\pi) = 2 + \sin\pi = 2 + 0 = 2$$

De er forskellige, og vi indser, at den rigtige funktion er $f(\theta) = 2 + \sin\theta$.