Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 15. Juni 2018

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En funktion er defineret ved
$$f(x,y) = e^{y-x^2}$$
for reelle variable x og y.

a. Find et udtryk for niveaukurven $f(x,y) = 1$.

Vi ser, at
$$e^{y-x^2} = 1.$$
Hvis vi nu tager den naturlige logaritme på hver side:
$$\log\left(e^{y-x^2}\right) = \log 1$$
bliver dette til
$$y - x^2 = 0,$$
da $ln(1) = 0$. Vi kan da bare lægge x^2 til på begge sider og opnår derfor:
$$y = x^2.$$

b. Hvilken vektor er parallel med $\nabla f(0,0)$?

Vi differentierer først $f(x,y)$ i forhold til både x og y. Husk, at vi skal bruge kædereglen. Det vil sige, at vi differentierer den ydre funktion e^z i forhold til z, hvilket bare giver e^z. Vi sætter da $z = y - x^2$, hvilken differentieres i forhold til både x og y, hvilket givet henholdsvis $-2x$ og 1. Kædereglen giver nu, at:
$$f_x(x,y) = e^z \cdot z_x = e^{y-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{y-x^2}, \quad f_y(x,y) = e^z \cdot z_y = e^{y-x^2} \cdot 1 = e^{y-x^2}.$$
Indsætter vi punktet $(0,0)$ i disse opnås:
$$f_x(0,0) = -2 \cdot 0 \cdot e^{0-0^2} = 0, \quad f_y(0,0) = e^{0-0^2} = e^0 = 1.$$
Altså er
$$\nabla f(0,0) = \langle 0,1 \rangle.$$
Det vil sige, at alle vektorer, der kan skrives $k\langle 0,1\rangle$ er parallelle med $\nabla f(0,0)$. Eksempelvis er $2\langle 0,1\rangle = \langle 0,2\rangle$ en parallel vektor.

c. Find udtrykket for den partielle afledede f_{xy}.

Husk, at $f_{xy} = f_{yx}$, hvorfor vi kan vælge at differentiere i forhold til y først. Men det gjorde vi i forrige opgave, hvilket gav:
$$f_y(x,y) = e^{y-x^2}.$$
Men det er jo lige præcis $f(x,y)$.
$$f_y(x,y) = e^{y-x^2} = f(x,y).$$
Hvis vi differentierer f_y i forhold til x fås f_{yx}. Men hvis vi differentierer denne, så svarer det til at differentiere $f(x,y)$, da disse er ens. Altså er
$$f_{yx} = f_x(x,y) = -2xe^{y-x^2},$$
hvor vi fandt sidste lighed i forrige opgave. Nemt.

Opgave 2

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle,$$

hvor parameteren t gennemløber de reelle tal.

a. Find det korrekte udtryk for farten $v(t)$.

Vi skal differentiere hver indgang i forhold til t. Vi får:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle t^2, 1, \sqrt{2}t \right\rangle$$

Farten er givet ved

$$v(t) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Vi får altså

$$v(t) = \sqrt{(t^2)^2 + 1^2 + (\sqrt{2}t)^2} = \sqrt{(t^2)^2 + 1^2 + 2t^2}.$$

Bemærk, at $(t^2)^2 = t^4$ og $1^2 = 1$, men jeg lave ikke denne omskrivning, da den nuværende måde er mere belejlig. Husk nu på kvadratsætningen

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Hvis vi sætter $a = t^2$ og $b = 1$, da det er disse to udtryk, der har potensen 2, så får vi

$$(t^2+1)^2 = (t^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot t^2 = (t^2)^2 + 1^2 + 2t^2.$$

Men det er præcis, hvad der står i kvadratroden. Vi kan altså lave følgende omskrivning:

$$v(t) = \sqrt{(t^2)^2 + 1^2 + 2t^2} = \sqrt{(t^2+1)^2} = t^2 + 1.$$

b. Hvad er buelængden fra $t = 0$ til $t = 3$?

Vi skal blot integrere farten over dette tidsinterval:

$$\int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 t^2 + 1 = \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^3 = (\frac{1}{3}3^3 + 3) - (\frac{1}{3}0^3 + 0) = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12.$$

c. Bestem accelerationsvektoren for kurven til $t = 2$.

Accelerationsvektoren til et tidspunkt t er blot $\mathbf{r}''(t)$. Vi har:

$$\mathbf{r}''(t) = \left\langle 2t, 0, \sqrt{2} \right\rangle.$$

Indsættes tiden $t = 2$ fås:

$$\mathbf{r}''(2) = \left\langle 2 \cdot 2, 0, \sqrt{2} \right\rangle = \left\langle 4, 0, \sqrt{2} \right\rangle.$$

Opgave 3

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 5e^{\frac{\pi}{3}i} \qquad \text{og} \qquad z_2 = 2i\left(\frac{3}{2} - 2i\right).$$

a. Hvad er z_1 på standard form?

Vi husker, at $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Vi får altså:

$$z_1 = 5e^{\frac{\pi}{3}i} = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

b. For alle komplekse tal w_1 og w_2 gælder, at $|\overline{w}_1| = |w_1|$ og $|w_1w_2| = |w_1||w_2|$. Hvad er $|2z_1^2\overline{z}_2|$.

Vi bruger regnereglerne og får:

$$|2z_1^2\overline{z}_2| = 2|z_1|^2|z_2|.$$

Vi kan hurtigt aflæse længden, modulus, af et komplekst tal, der er på polær form. Fra z_1 ser vi, at det er 5. Længden er nemlig den, der er ganget på $e^{i\theta}$. Vi mangler blot at udregne $|z_2|$:

$$|z_2| = \left|2i\left(\frac{3}{2} - 2i\right)\right| = |2i|\left|\frac{3}{2} - 2i\right| = 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 2\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = 2\sqrt{\frac{25}{4}} = 2\frac{5}{2} = 5.$$

Vi indsætter nu værdierne:

$$|2z_1^2\overline{z}_2| = 2|z_1|^2|z_2| = 2 \cdot 5^2 \cdot 5 = 2 \cdot 25 \cdot 5 = 2 \cdot 125 = 250.$$

Opgave 4

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$2y'' + 3y' - 2y = 0.$$

a. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Vi betragter det karakteristiske polynomium og finder rødderne:

$$2r^2 + 3r - 2 = 0.$$

Diskriminanten er da,

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25.$$

Dermed er

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases} .$$

Da vi har to reelle rødder bruger vi løsningsformen

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

hvorfor løsningen til opgaven er

$$y(t) = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{-2t}.$$

Alternativt kan man bytte rundt på konstanterne (det er jo stadig uspecificerede konstanter):

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}.$$

Det oplyses, at $x_p(t) = -t - 2$ er en partikulær løsning til

$$2x'' + 3x' - 2x = 2t + 1.$$

Find den entydige løsning til begyndelsesværdiproblemet givet ved

$$2x'' + 3x' - 2x = 4t + 2, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Bemærk først, at den partikulære løsning gælder for en højre side, hvor der står $2t + 1$. I opgaven oplyses $4t + 2$. Dette kan også skrives som $2(2t + 1)$. Altså er der blot ganget 2 på. Fordi det er en konstant, der er ganget på, kan vi bruge superpositionsprincippet, hvor vi blot ganger samme tal på løsningen, altså 2. Den partikulære løsning til vores begyndelsesproblem er altså $-2t - 4$.

Vi fandt den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning i opgave a (det er lige meget, om der står x eller y, resultatet er gyldigt, selv hvis der havde stået ξ). Denne kan vi sætte sammen med den oplyste partikulære løsning, hvorved vi opnår:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4.$$

Vi indsætter $t = 0$:

$$x(0) = c_1 e^{-2\cdot 0} + c_2 e^{\frac{1}{2}0} - 2 \cdot 0 - 4 = c_1 + c_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 4 - c_2.$$

Vi kan også differentiere $x(t)$, således $x'(t)$ findes:

$$x'(t) = -2c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}t} - 2.$$

Vi benytter så begyndelsesbetingelsen $x'(0) = 0$:

$$x'(0) = -2c_1 e^{-2\cdot 0} + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 2 = -2c_1 + \frac{1}{2} c_2 - 2 = 0.$$

Bruger vi $c_1 = 4 - c_2$ fra før, finder vi, at

$$-2c_1 + \frac{1}{2} c_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -2(4 - c_2) + \frac{1}{2} c_2 = 2 \Leftrightarrow -8 + 2c_2 + \frac{1}{2} c_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} c_2 = 10.$$

Gang med 2 og divider med 5 på begge sider, og vi finder c_2:

$$c_2 = \frac{2}{5} 10 = \frac{20}{5} = 4.$$

Vi kan så indsætte denne værdi for c_2 i $c_1 = 4 - c_2$:

$$c_1 = 4 - c_2 = 4 - 4 = 0.$$

Vores løsning bliver da

$$x(t) = 0e^{-2t} + 4e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4 = 4e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4.$$

Opgave 5

En funktion er givet ved
$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$
for en reel variabel x.

a. Find den dobbelt afledede $f''(x)$.

Vi differentierer først f én gang ved at bruge kædereglen. Lad $y = x^2 + 1$. Hvis vi differentierer $\sqrt{y}$ i forhold til y fås:
$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Dette svarer til den 'ydre funktion' differentieret i kædereglen, hvor vi blot erstatter y med x^2+1. Den ydre funktion differentieret er altså givet ved $\frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)}}$. Den indre funktion er blot $y = x^2 + 1$, hvilken vi differentierer i forhold til x. Dette giver selvfølgelig $y' = 2x$. Kædereglen giver os nu, at
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{2x}{2\sqrt{(x^2+1)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

En anden måde, at skrive dette kan være
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$
som, jeg personligt synes, er lettere at differentiere. Vi ser, at f' indeholder et produkt, hvilket er mellem x og $(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$. Produktreglen siger i ord: 'Den ene differentieret ganget med den anden udifferentieret. Dette lægges sammen med den ene udifferentieret ganget med den anden differentieret'.

Vi ved, at x differentieret er 1. Så problemet ligger i $(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$. Lad y være som tidligere, så kan dette skrives $y^{-\frac{1}{2}}$. Hvis vi differentierer denne bliver dette til $-\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}$. Vi kan da erstatte y med x^2+1, hvorfor den ydre funktion differentiereet bliver: $-(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. Den indre funktion ved vi allerede fra tidligere, at den er $2x$ differentieret. Altså bliver den afledede af $(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ til $-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. Produktreglen giver os nu, at
$$f''(x) = x\left(-2x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right) + 1 \cdot \left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

På brøkform bliver dette
$$f''(x) = x\left(-\frac{x}{(x^2+1)^2}\right) + \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2+1)^1}.$$

Vi kan forlænge den sidste brøk med $(x^2+1)^1$ og få:
$$f''(x) = -\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Bemærk, sidste omksrivning skyldes, at $z^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{z})^3 = (\sqrt{z})^2\sqrt{z} = z\sqrt{z}$.

b. Opskriv udtrykket for et anden ordens taylorpolynomium for f med udviklingspunkt $x = 0$.

Vi bruger formlen

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

Vi skal altså blot finde ud af, hvad $f(0)$, $f'(0)$ og $f''(0)$ er. Vi får:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0^2+1} = \sqrt{1} = 1 \\ f'(0) &= \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = \frac{0}{1} = 0. \\ f''(0) &= \frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Dermed er taylorpolynomiet:

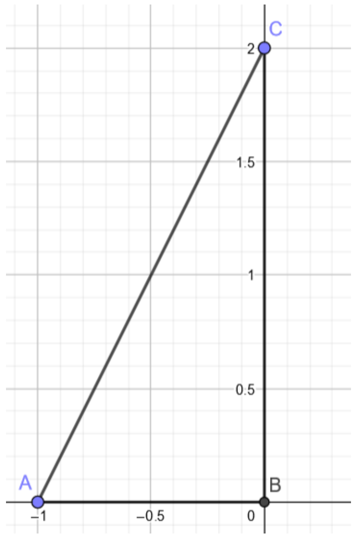
$$P_2(x) = 1 + 0x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

Opgave 6

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkter inden for og på trekanten med hjørner i punkterne $A = (-1,0)$, $B = (0,0)$, $C = (0,2)$. Et legeme med massetæthed $\delta(x,y) = x^2y^2$ dækker området $\mathcal{R}$.

a. Beskriv området $\mathcal{R}$ med uligheder.

Vi tegner lige trekanten først:



Vi kan se, at x ligger mellem -1 og 0. Vi kan altså sige

$$-1 \leq x \leq 0.$$

Endvidere går y fra 0 til 2. MEN, vi skal lige være opmærksomme på, at den afhænger af værdien af x. Den øvre grænse for y er nemlig den rette linje mellem A og C. Vi kan udregne en sådan linje ved at sige

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) + y_1.$$

Vi sætter $C = (x_1, y_1) = (0,2)$ og $A = (x_2, y_2) = (-1,0)$. Vi får:

$$y = \frac{2-0}{0-(-1)}(x-0) + 2 = 2x + 2.$$

Vores variabel y er altså opadtil begrænset af linjen $2x + 2$. Vores grænser er da

$$-1 \leq x \leq 0, \qquad 0 \leq y \leq 2x + 2.$$

b. Hvad er den korrekte formel som giver legemets masse?

Eftersom y i vores uligheder afhænger af x, skal y være den inderste integrationsvariabel, og dermed er x yderst. Funktionen vi skal integrere er tæthedsfunktionen, $\delta(x,y)$, når vi vil finde en masse.

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} \delta(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} x^2y^2\,dy\,dx.$$

Havde det været et areal eller volumen, I skulle finde, så ville funktionen, der skulle integreres, ikke være δ men 1.

Opgave 7

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkterne med koordinater (x, y) som opfylder to uligheder

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq x.$$

Find værdien af planintegralet

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dA.$$

Svar:

Vi kigger på polær integration! Husk, at $x^2 + y^2 = r^2$ og $x = r\cos\theta$ (sidste bruges lidt senere, lige nu skal vi først omskrive uligheder). Uligheden $x^2 + y^2 \leq 1$ kan da skrives $r^2 \leq 1$. Det betyder jo bare, at $r \leq 1$, da kvadratroden af 1 er 1. Endvidere kigger vi kun på positive radia.[1] Derfor er

$$0 \leq r \leq 1.$$

Derudover ser vi fra $0 \leq x$, at x skal være positiv. Det betyder, at vi kigger på 1. og 4. kvadrant. Altså skal vinklen variere fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hvis du hellere vil bruge $\frac{3\pi}{2}$ frem for $-\frac{\pi}{2}$, så må du også det.

Vi har nu vores grænser i det polære plan. Nu skal vi bare lige omskrive funktionen, der skal integreres, til polære koordinater. Men fra det første jeg noterede i denne opgave, så kan vi lave følgende omskrivning

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

En anden ting vi skal huske, når vi går fra kartesiske koordinater til polære koordinater, når vi integrerer, er, at vi skal gange med et r. Altså fås integralet

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\cos\theta}{r} r\, dr\, d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos\theta\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \int_0^1 1\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta [r]_0^1\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \\
&= [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 1 - (-1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

[1] Ellers ville vi ende med at tage samme areal 2 gange, hvis vi lod -1 være den nedre grænse. Det vill være fjollet.

Opgave 8

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = \cos(z) + 2z + xy - x^2.$$

a. Find ligningen for tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (1, 0, 0)$.

Vi differentierer fladens ligning i forhold til både x, y og z:

$$F_x(x, y, z) = y - 2x, \quad F_y(x, y, z) = x, \quad F_z(x, y, z) = -\sin(z) + 2.$$

Vi indsætter nu punktet i disse funktioner:

$$F_x(P) = 0 - 2 \cdot 1 = -2, \quad F_y(P) = 1, \quad F_z(P) = -\sin(0) + 2 = 2.$$

Tangentplanen er nu givet ved

$$F_x(P)(x - P_x) + F_y(P)(y - P_y) + F_z(z - P_z) = 0,$$

hvorfra vi får

$$-2(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - 0) = -2x + 2 + y + 2z = 0.$$

Isoleres z opnås

$$2z = 2x - y - 2 \Leftrightarrow z = x - \frac{1}{2}y - 1.$$

Fra ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\frac{\partial z}{\partial z}$ i punktet P?

Vi skal have fat i implicit funktionssætningen. Men for at holde det simpelt: Husk tilbage på formlen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

Vi har fra forrige opgave, at $F_x(P) = -2$ og $F_z(P) = 2$. Vi indsætter

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Opgave 9

En funktion er givet ved

$$f(x,y)=\sqrt{2x^2-xy+2}$$

for reelle variable x og y.

a. Bestem definitionsmængden for f.

Vi skal se, hvornår det 'går godt' for funktionen. Oftest er det lettest at spørge sig selv, 'hvornår går det egentligt galt?' - Vi ser, at der er en kvadratrod. Vi må ikke tage kvadratroden af noget negativt i det reelle tilfælde. Derfor har vi kravet:

$$2x^2-xy+2\geq 0.$$

Vi kan så rokere rundt på tingene, som det passer. Så lad os lægge xy til på begge sider:

$$2x^2+2\geq xy,$$

hvilket også kan skrives

$$xy\leq 2x^2+2.$$

b. Hvilket af punkterne er et kritisk punkt for f?

Lad os differentiere skidtet i første omgang. Det kræver brug af kædereglen. Så lad $z=2x^2-xy+2$. Vi ved, at

$$\left(\sqrt{z}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

hvilket er den ydre funktion differentieret. Hvis vi så differentierer z i forhold til henholdsvis x og y findes den indre funktion differentieret:

$$z_x=4x-y,\qquad z_y=-x.$$

Vi får altså de afledede til at være

$$f_x(x,y)=(4x-y)\frac{1}{2\sqrt{z}}=(4x-y)\frac{1}{2\sqrt{2x^2-xy+2}},\quad f_y(x,y)=(-x)\frac{1}{2\sqrt{z}}=(-x)\frac{1}{2\sqrt{2x^2-xy+2}}.$$

Der er to muligheder nu. Enten kan vi indsætte alle punkterne givet i opgaven. Jeg har ikke skrevet dem ind, for det gider jeg ikke. Den anden er at finde alle kritiske punkter matematisk. Det gør vi ved at sætte de afledede lig med 0, og finde de par af x og y, der opfylder disse ligninger:

$$f_x(x,y)=0\Leftrightarrow(4x-y)\frac{1}{2\sqrt{2x^2-xy+2}}=0$$
$$f_y(x,y)=0\Leftrightarrow(-x)\frac{1}{2\sqrt{2x^2-xy+2}}=0.$$

Det gode er, at vi blot kan gange med nævneren på begge sider i begge ligninger. Men når vi ganger med den på højre side bliver det bare et nul. Når vi ganger den på venstre forsvinder nævneren. Vi står altså tilbage med:

$$\begin{aligned}4x-y&=0\\-x&=0.\end{aligned}$$

Det fremgår af den sidste, at x skal være 0. Indsættes den i ligningen ovenover finder vi, at

$$4 \cdot 0 - y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Altså skal både x og y være 0. Punktet $(0, 0)$ er altså det eneste kritiske punkt.

c. Hvad er den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (0, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.

Vi finder først gradientvektoren i punktet P, da $\nabla f(P) = \langle f_x(P), f_y(P) \rangle$, bliver

$$\nabla f(P) = \left\langle (4 \cdot 0 - 1)\frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 1 + 2}}, (-0)\frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 1 + 2}} \right\rangle = \left\langle \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0 \right\rangle.$$

Altså er

$$\nabla f(P) = \left\langle -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0 \right\rangle.$$

Vi kan finde $D_{\mathbf{u}}f(P)$ ved at sige $\nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$. Det giver

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \left\langle -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

d. Hvilken enhedsvektor peger i den retning, hvor f aftager hurtigst i punktet P?

Enhedsvektoren i retningen, hvor f aftager hurtigst, findes ved at sige

$$-\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}.$$

Vi kender allerede

$$\nabla f(P) = \left\langle \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0 \right\rangle.$$

Længden af gradientvektoren kan ses med det samme, da den ene koordinat er 0, hvorfor længden af vektoren er den absolutte værdi af den koordinat, som ikke er 0. Vi har, at

$$\|\nabla f(P)\| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dermed er

$$-\frac{\left\langle \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0 \right\rangle}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = -\langle -1, 0 \rangle = \langle 1, 0 \rangle.$$

Altså aftager f altså hurtigst i retningen $\langle 1, 0 \rangle$.

Opgave 10

Betragt følgende første ordens differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = 3y + yx.$$

a. Differentialligningen er seperabel.

Ja. En differentialligning er seperabel, hvis vi kan skrive den på formen

$$P(y)\frac{dy}{dx} = G(x).$$

Det vil sige en funktion, der kun afhænger af y ganget på differentialkvotienten. Og en funktion, der kun afhænger af x som står isoleret på højre side. Hvordan opnår vi det? Jamen hvis vi dividerer med y på begge sider i differentialligningen, så får vi

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3 + x.$$

Så hvis vi lader $P(y) = \frac{1}{y}$ og $G(x) = 3 + x$, så har vi pludseligt formen. Derfor er det et ja.

b. Differentialligningen har en løsning, der opfylder betingelsen $y(0) = 2$. Hvad er $y(1)$ for denne løsning?

Vi omskriver ligningen fra før til

$$\frac{1}{y}\,dy = 3 + x\,dx$$

ved at gange med dx på begge sider. Vi integrerer nu på begge sider

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 3 + x\,dx.$$

Disse integraler bliver da til

$$\ln|y| = 3x + \frac{1}{2}x^2 + C,$$

hvor C er en konstant. Vi finder nu C ved at bruge begyndelsesbetingelsen:

$$\ln|2| = 3 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C = C.$$

Dermed er

$$\ln|y| = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \ln 2.$$

Vi opløfter nu til potens af eksponentialfunktionen og får

$$e^{\ln|y|} = |y| = \exp\left(3x + \frac{1}{2}x^2 + \ln 2\right) = 2\exp\left(3x + \frac{1}{2}x^2\right).$$

Højresiden er altid positiv, så vi kan droppe absolut-værdierne ved y. Vi prøver at indsætte 1 på x's plads:

$$y = 2\exp\left(3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = 2\exp\left(\frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{7}{2}}.$$

c. Differentialligningen har en anden løsning, der opfylder betingelsen $y'(0) = 2$. Hvad er $y(0)$ for denne løsning?

Vi kan faktisk indsætte dette direkte i vores differentialligning.

$$\frac{dy}{dx} = 3y + yx.$$

Vi erstatter $\frac{dy}{dx}$ med $y'(0) = 2$, og indsætter $y(0)$ på y's plads samt sætter $x = 0$:

$$2 = 3y(0) + 3y(0) \cdot 0 = 3y(0) \Leftrightarrow y(0) = \frac{2}{3}.$$

Opgave 11

En kurve i planen er givet ved

$$x = \cos(t) + t$$
$$y = t^2 + 2t + 1.$$

a. For hvilken værdi af t går kurven gennem punktet $P = (1, 1)$?

Lad os kigge på den udtrykket for y og indsætte 1 på dennes plads. Vi får

$$1 = t^2 + 2t + 1 \Leftrightarrow 0 = t^2 + 2t = t(t + 2).$$

Vi kan aflæse de to muligheder for t af denne. Det er kun 0 og -2, der løser ligningen $t^2 + 2t + 1 = 1$ (eller ligningen $t(t+2) = 0$). Vi kan hurtigt sige, at -2 ikke kommer til at give $x = 1$, da $\cos(-2)$ så skulle give 3. Men cosinus kan ikke overstige 1. Vi prøver så med 0 og ser, at $x = \cos 0 + 0 = 1$. Altså skal $t = 0$.

b. Hvad er kurvens krumning i P?

Vi skal differentiere udtrykkende to gange:

$$x'(t) = -\sin(t) + 1, \quad x''(t) = -\cos(t), \quad y'(t) = 2t + 2, \quad y''(t) = 2.$$

Vi indsætter nu $t = 0$ i disse:

$$x'(0) = -\sin 0 + 1 = 1, \quad x''(0) = -\cos 0 = -1, \quad y'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2, \quad y''(0) = 2.$$

Krumningens formel er givet ved

$$\frac{|x' \cdot y'' - x'' \cdot y'|}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}.$$

Indsættes de fundne værdier fås

$$\frac{|1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}^3} = \frac{|2 + 2|}{\sqrt{5}^3} = \frac{4}{\sqrt{5}^2 \sqrt{5}} = \frac{4}{5\sqrt{5}}.$$

c. Hvilken parametrisering af tangentlinjen til kurven i punktet P har konstant fart 1?

Lad os først opstille en parametrisering af tangentlinjen til kurven i punktet P. Vi bruger punktet P som vores 'startpunkt'. Endvidere gav forrige opgave, at $x'(0) = 1$ og $y'(0) = 2$. Her er x' og y' hældningerne, det vil sige, de skal ganges på t. Punktet $P = (1, 1)$ står isoleret. Konkret betyder det, at linjen kan parametriseres

$$\langle 1 + t, \ 1 + 2t \rangle.$$

Lad os differentiere indgangene i denne (vi skal bruge afledede for at finde farten af en kurve). Vi får

$$\langle 1, 2 \rangle.$$

Farten er da

$$v(t) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Bemærk, det er kun hældningen, der skal påvirkes, da startpunktet ikke har indflydelse på farten. Vi dividerer altså kun hældningerne og får:

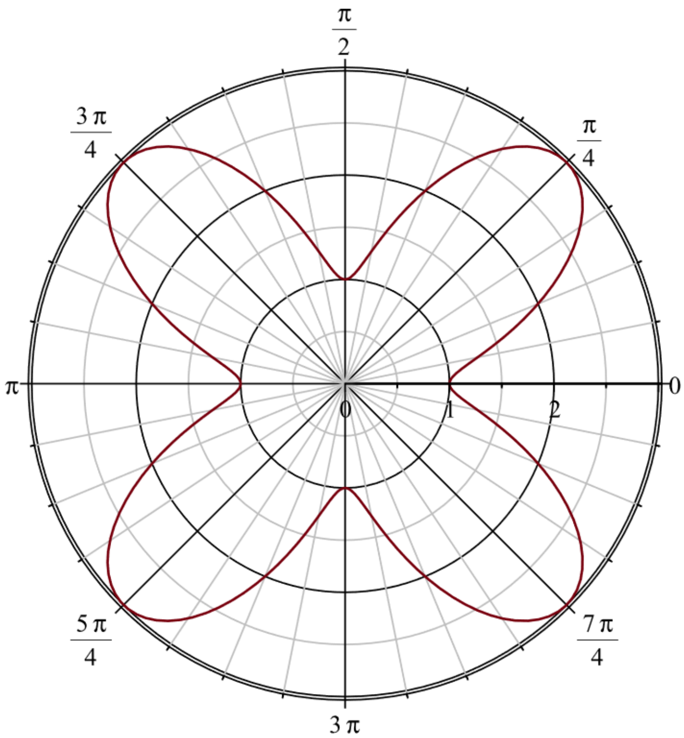
$$\langle 1 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2t}{\sqrt{5}} \rangle.$$

Opgave 12

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne i listen svarer til figuren. Hvilken?

$$f_1(\theta) = \sin(4\theta) - \cos(4\theta), \qquad f_2(\theta) = \sin(4\theta) - 2, \qquad f_3(\theta) = 2 - \cos(4\theta),$$

$$f_4(\theta) = \theta \sin(4\theta), \qquad f_5(\theta) = \cos(2\theta), \qquad f_6(\theta) = 2 + \sin(2\theta).$$

Svar:

Jeg bruger udelukkelsesmetoden og har derfor givet funktionerne forskellige numre. Jeg aflæser på figuren, at $\theta = 0$ skal give en radius på 1. Vi indsætter:

$$f_1(0) = \sin(4 \cdot 0) - \cos(4 \cdot 0) = 0 - 1 = -1, \qquad f_2(0) = \sin(4 \cdot 0) - 2 = 0 - 2 = -2,$$

$$f_3(0) = 2 - \cos(4 \cdot 0) = 2 - 1 = 1, \qquad f_4(0) = 0 \sin(4 \cdot 0) = 0$$

$$f_5(0) = \cos(2 \cdot 0) = 1, \qquad f_6(0) = 2 + \sin(2 \cdot 0) = 2.$$

Det er altså kun f_3 og f_5, der opfylder, at $f(0) = 1$. Vi ser til gengæld, at funktionen går helt ud til 3. Men da cos ikke kan få større værdier end 1, kan f_5 ikke ramme værdier større end 1. Derfor skal det være f_3, der er svaret, da denne trods alt har $2 - \cos(4\theta)$, så hvis cosinus-ledet bliver -1 bliver funktionsværdien 3. Dette er altså det eneste mulige svar.