Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 14. Juni 2019

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En funktion er defineret ved

$$f(x, y, z) = 1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

for reelle variable x og y.

a. Bestem definitionsmængden for f.

Vi spørger os selv: Hvornår kan det gå galt i funktionen? - Jamen vi har med en brøk at gøre, det vil sige, at der kan være nogle problemer med nævneren, hvis denne bliver nul. Vi ser, at

$$x^2 + y^2 \neq 0.$$

Jeg tror, der er en fejl i opgavebeskrivelsen, da z også bør være en reel variabel. Hvis z f.eks. er et komplekst tal, så giver det ikke mening, at sige z-aksen, da vi ikke kan ordne komplekse tal på en enkelt akse.

Vi antager altså, at z også er en reel variabel, hvilket betyder, at denne har en akse. Vi ved også, at z-aksen er linjen, der præcist opfylder $x^2 + y^2 = 0$. Så det er altså hele rummet uden z-aksen, der er vores definitionsmængde.

b. Hvad er niveauoverfladen $f(x, y, z) = 1$?

Vi tjekker

$$1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2} = 1$$

Træk 1 fra på begge sider:

$$\frac{z^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Gang med $x^2 + y^2$ på begge sider:

$$z^2 = 0$$

Og tag kvadratroden på begge sider

$$z = 0$$

Vi har, at $z = 0$ indikerer xy-planet, men vi må ikke medtage origo af planet grundet definitionsmængden fra tidligere opgave.

Opgave 2

En parametrisk kurve i rummet er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), \quad \cos(2t), \quad 2t \rangle,$$

hvor parameteren t gennemløber alle de reelle tal.

a. Hvad er kurvens hastighedsvektor?

Vi skal blot differentiere alle tre indgange, hvilket vi bruger kædereglen til. Vi får:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2\cos(2t), \quad -2\sin(2t), 2 \rangle$$

Vi vælger svaret 'ingen af de andre'.

b. Hvilken af de følgende vektorer er kurvens accelerationsvektor for $t = \pi$.

Vi differentierer hastighedsvektoren for at få accelerationsvektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = \langle -4\sin(2t), \quad -4\cos(2t), \quad 0 \rangle$$

Vi indsætter $t = \pi$ og får:

$$\mathbf{a} = \langle -4\sin(2\pi), \quad -4\cos(2\pi), \quad 0 \rangle = \langle -4 \cdot 0, \quad -4 \cdot 1, \quad 0 \rangle = \langle 0, -4, 0 \rangle$$

c. Hvad er kurvens fart?

Vi skal blot finde længden af hastighedsvektoren (vi har lige idiotformlen i baghovedet):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}(t)\| &= \sqrt{(2\cos(2t))^2 + (-2\sin(2t))^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{4\cos^2(2t) + 4\sin^2(2t) + 4} \\
&= \sqrt{4(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) + 4} \\
&= \sqrt{4 \cdot 1 + 4} \\
&= \sqrt{4 + 4} \\
&= \sqrt{4 \cdot 2} \\
&= \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

d. Hvad er kurvens længde fra $t = \pi$ til $t = 2\pi$.

Vi integrerer længden af kurvens fart med de givne grænser:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \|\mathbf{v}(t)\| \, dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2\sqrt{2} \, dt = \left[2\sqrt{2}t \right]_{\pi}^{2\pi} = 2\sqrt{2}(2\pi - \pi) = 2\sqrt{2}\pi$$

Opgave 3

Tre komplekse tal er givet ved

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2i^3, \quad \text{og} \quad z_3 = i^{10}.$$

a. Hvad er $z_1 + z_2$ på polær form?

Vi omskriver først z_2:

$$z_2 = 2i^3 = 2i \cdot i^2 = -2i.$$

Vi finder nu $z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = 1 + i + (-2i) = 1 - i.$$

Vi finder nu modulus af $1 - i$:

$$r = \|1 - i\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Endvidere har vi, at

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta),$$

hvilket kan omskrives:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}, \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{r}.$$

Indsættes værdierne fås:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De eneste værdier for $\theta \in [0, 2\pi[$, der opfylder $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ er $\frac{\pi}{4}$ og $-\frac{\pi}{4}$. Endvidere er de eneste værdier for $\theta \in [0, 2\pi[$, der opfylder $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, er $-\frac{\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{4}$. Det eneste overlap, der er mellem cos og sin ligningerne er $-\frac{\pi}{4}$. Vi får altså:

$$r = \sqrt{2}, \qquad \theta = -\frac{\pi}{4},$$

hvilket giver os

$$z_1 + z_2 = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

b. Hvad er $\frac{z_1}{z_3}$ på standardformen $a + ib$?

Vi omskriver først z_3:

$$z = i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$$

Dermed er:

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{1 + i}{-1} = -\frac{1 + i}{1} = -1 - i.$$

c. Hvad er hovedargumentet for z_1^5?

Vi skal bruge argumentet af z_1. Man kan med samme fremgangsmåde som i a'eren komme frem til $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ - man kan også bare huske det. Ikke desto mindre bruger vi den givne formel:

$$\arg(z^n) = n \arg(z),$$

hvilket giver os:

$$\arg(z_1^5) = 5 \arg(z_1) = 5\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Men dette tal er større end π, hvorfor det ikke findes i intervallet $]-\pi, \pi]$. Vi trækker da 2π fra for at få lavet det om til en værdi i intervallet:

$$\frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{4 \cdot 2\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Opgave 4

a. En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' = 2y' - y.$$

Bestem den fuldstændige løsning.

Først omskriver vi ligningen:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Vi opstiller den karakteristiske ligning:

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Finder diskriminanten:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0.$$

Hvilket giver løsningen:

$$r = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Da $D = 0$ er løsningen på formen $y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$ eller $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{rt}$. Svaret er altså

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t.$$

b. Bestem en partikulær løsning $x_p(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t) + 1.$$

Vi har ligninge omskrevet er

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 1.$$

Da venstre-siden kun indeholder en konstant, gætter vi på, at $x_p(t) = A$. Endvidere fås:

$$x_p(t) = A, \quad x_p'(t) = 0, x_p''(t) = 0.$$

Indsættes dette i forrige ligning fås:

$$0 - 2 \cdot 0 + A = 1$$

Altså er $A = 1$. Vores partikulære løsning bliver da

$$x_p(t) = 1.$$

c. Bestem løsningen $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t) + 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Fra de to forrige opgaver ved vi, at løsningen er på formen

$$x(t) = c_1e^t + c_2te^t + 1.$$

Vi kan indsætte første betingelse i denne:

$$x(0) = c_1e^0 + c_2 \cdot 0e^0 + 1 = c_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

Dermed er

$$x(t) = -e^t + c_2te^t + 1.$$

Differentieres $x(t)$ fås (husk produktreglen på andet led):

$$x'(t) = -e^t + c_2te^t + c_2e^t.$$

Vi indsætter nu anden betingelse i denne:

$$x'(0) = -e^0 + c_2 \cdot 0e^0 + c_2e^0 = -1 + c_2 = -1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 2$$

Vi får altså løsningen:

$$x(t) = -e^t + 2te^t + 1 = (2t-1)e^t + 1.$$

Opgave 5

Bestem om følgende er sandt eller falsk:

a. Hastighedsvektoren til en kurve kan aldrig have en nullængde.

Falsk. Eksempel på en kurve:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 4t, 5, \pi \rangle$$

Denne har hastighedsvektor

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t - 4, 0, 0 \rangle$$

Indsættes $t = 2$ fås:

$$\mathbf{v}(2) = \langle 2 \cdot 2 - 4, 0, 0 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

Men dette giver

$$\|\mathbf{v}(2)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0.$$

Så hastighedsvektoren til en kurve kan godt have nullængde.

b. Når et punkt bevæger sig på en ret linje, så er krumningen uendelig stor.

Niks, den er faktisk 0 i det tilfælde.

c. Hvis $f(x) = \cos(x)$ og $g(t) = e^t$, så er $h(t) = f(g(t))$ differentiabel og $h'(t) = -\sin(e^t)$.

Nej, man skal bruge kædereglen:

$$h'(t) = g'(t) \cdot f'(g(t)).$$

Det vil sige:

$$h'(t) = e^t \cdot \left(-\sin\left(e^t\right)\right)$$

Vedkommende har altså glemt at gange med den indre funktion differentieret ($g'(t)$).

d. Funktionen $f(x) = \ln(x)$ hvor $0 < x < 1$ har en invers funktion.

Jep, faktisk har den inversfunktionen e^x for $0 < x$ uden nogen øvre grænse for x. Så selvfølgelig har den også, når x er begrænset opadtil.

Opgave 6

Et område $\mathcal{R}$ i planen kan repræsenteres ved hjælp af uligheden

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

a. Beskriv randen af $\mathcal{R}$.

Randen af $\mathcal{R}$ er givet ved

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Men dette er jo præcist cirklens ligning, da denne kan skrives:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1^2,$$

hvilket stemmer overens med cirklens ligning:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

hvor (a, b) er cirklens centrum, og r er cirklens radius. Randen er altså en cirkel med centrum i $(0, 1)$ med radius 1.

b. Bestem ulighederne, der beskriver, at et punkt med koordinaterne $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ tilhører $\mathcal{R}$.

Vi ved, at cirklen har centrum i $(0, 1)$ med radius 1. Det betyder, at den laveste y-værdi, vi arbejder med er $y = 0$. Resten er større. Altså befinder vi os kun i de to øvre kvadranter i $\mathbb{R}^2$. Det betyder, at vores vinkel ikke skal medtage de sidste to kvadranter. Vi har altså

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

Vi omskriver den givne ulighed for $\mathcal{R}$ ved at gange parentesen ud:

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 1$$

Træk 1 fra på begge sider:

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0.$$

Vi ved, at

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Indsættes dette i vores ulighed fås:

$$r^2 - 2r\sin\theta \leq 0.$$

Sættes r uden for parentes fås:

$$r(r - 2\sin\theta) \leq 0.$$

Udtrykket er lig med nul (den øvre grænse), når $r = 0$ og $r = 2\sin\theta$. Da funktionen er kontinuert, er alt imellem de to grænseværdier gyldige. Endvidere er $2\sin\theta$ den øvre grænse, da $\sin(\theta) \in [0, 1]$, når $\theta \in [0, \pi]$. Vi får altså

$$0 \leq r \leq 2\sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

c. Området $\mathcal{R}$ modelerer en plade med en massefylde $\delta(x,y) = y$. Opstil integralet for pladens masse ved polære koordinater.

I kartesiske koordinater havde det være:

$$\int\int_{\mathcal{R}} \delta(x,y)\, dA = \int\int_{\mathcal{R}} y\, dA.$$

Vi husker, at $y = r\sin\theta$. Derudover skal vi huske, at når vi går fra kartesiske koordinater til polære koordinater, så skal funktionen, der integreres, ganges med r. Det er altså følgende polære integral, vi kigger på:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\cdot r\sin\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta$$

Opgave 7

Et område $\mathcal{R}$ i planen består af alle punkter med koordinater (x, y), som opfylder uligheden

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Funktionen f er defineret på $\mathcal{R}$ og givet ved $f(x, y) = x^2$.

a. Bestem de indre kritiske punkter for f.

Husk, at et kritisk punkt skal være nul for både f_x og f_y (f differentieret i forhold til x og y). Differentieres $f(x, y)$ i forhold til både x og y fås:

$$f_x(x, y) = 2x, \qquad f_y(x, y) = 0.$$

Det er klart, at alle værdier af x og y giver, at $f_y(x, y) = 0$, da denne konstant er nul. For f_x har vi:

$$f(x, y) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} = 0.$$

Så x skal altså være nul, og y kan være alle værdier. Vi skal dog huske, at vi befinder os inden for $\mathcal{R}$. Og da det skal være et indre punkt, må de ikke ligge på randen, dvs vi betragter:

$$x^2 + (y-1)^2 < 1.$$

Vi indsætter nu $x = 0$:

$$0^2 + (y-1)^2 = (y-1)^2 < 1$$

Men dette svarer til uligheden:

$$y^2 + 1 - 2y < 1.$$

Træk 1 fra på begge sider og sæt y uden for en parentes:

$$y(y-2) < 0.$$

Rødderne for venstre side er 0 og 2. Alle værdier for y imellem disse to værdier giver en venstre side, der er mindre end nul. Derfor er følgende punkter svaret:

$$(0, y), \text{ hvor } 0 < y < 2.$$

b. Hvilken af de nedenstående funktioner tager de samme værdier som f, når (x, y) tilhører randen af $\mathcal{R}$?

Jeg blev enig med mig selv i opgave 6a, om at randen var en cirkel med radius fra centrum $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Det betyder, at x-værdien på randen ligger i intervallet: $x_0 - r \le x \le x_0 + r$. Tilsvarende for y. Vi får altså:

$$-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2.$$

Bemærk: Vi kan kun betragte x og y hver for sig i dette tilfælde, da ingen af funktionerne indeholder BÅDE x og y. Havde de gjort det, så ville det være noget mere kompliceret. Men i og med at funktionerne kun indeholder enten x ELLER y, og vi ved, at cirklen jo går gennem alle x-værdierne (og y-værdierne), når vi skal fra den ene 'ydre' x-værdi til den anden, så kan vi blot betragte intervaller.

Hvilke værdier tager vores funktion f så? Jamen, nul giver den mindste værdi, og ± 1 (giver den største:

$$f(0) = 0^2 = 0, \quad f(-1) = f(1) = (\pm 1)^2 = 1.$$

Så f tager værdierne $[0, 1]$.

$$g(y) = (y-1)^2, \quad -1 \le y \le 0.$$

Denne havde været meget fornuftig, hvis grænserne havde været $0 \le y \le 2$. Men vi har i stedet tilfældet:

$$g(-1) = (-1-1)^2 = (-2)^2 = 4.$$

Men $4 \notin [0, 1]$, hvorfor denne funktion giver værdier, som ikke er de samme som f.

Det er også værd at notere, at $y = -1$ ikke kan lade sig gøre i forhold til at være et punkt på randen af cirklen, da $y \in [0, 2]$.

$$g(y) = y^2, \quad 0 \le y \le 2.$$

Denne havde været meget fornuftig, hvis $0 \le y \le 1$. Men nu har vi, at

$$g(2) = 2^2 = 4.$$

Igen ligger denne uden for det interval af værdier, som f antager.

$$g(y) = 1 - y^2, \quad 0 \le y \le 2$$

Denne havde været fin nok, hvis den øvre grænse var 1. Lad os prøve at smide de to grænser ind:

$$g(0) = 1 - 0^2 = 1.$$

Denne er okay.

$$g(2) = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3.$$

Denne er ikke okay. -3 er klart mindre end 0, som er den mindste værdi, f antager!

$$g(x) = 1 + x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

Denne giver PRÆCIS de samme værdier som den forrige funktion. Nu kalder de 'bare' variablen for x. Derudover må x-variablen ikke være større end 1, så der er flere ting, der går galt her.

$$g(x) = x^2, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Det her er jo lige præcis forskriften for f. Denne er altså korrekt, da intervallet og forskriften spiller!

Ingen af de andre.

Trivielt.

c. Hvad er den maksimale værdi af f?

Det skrev jeg i forrige opgave. Da x kun må ligge i intervallet $[-1, 1]$, skal vi vælge den numerisk største værdi. Det vil sige største værdi, hvis den er større end den mindste er lille. Eller den mindste værdi, hvis den er mindre end den største er stor. I vores tilfælde er det ligegyldigt, da $|-1| = |1| = 1$:

$$f(1) = 1^2 = 1.$$

Opgave 8

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x,y,z) = 0$, hvor

$$F(x,y,z) = 2y\sin(x) + y^2 - z^2.$$

a. Bestem gradientvektoren ∇F.

Vi differentierer F i forhold til de tre variable:

$$\nabla F(x,y,z) = \langle 2y\cos(x), \quad 2\sin(x) + 2y, \quad -2z\rangle$$

b. Bestem ligningen for tangentplanet til $\mathcal{F}$ i punktet $P = (0,1,1)$.

Tangentplanets ligning er på formen

$$\nabla F(P) \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix} = 0,$$

hvor $P = (a,b,c)$. Alternativt kan denne skrives

$$F_x(P)(x - P_x) + F_y(P)(y - P_y) + F_z(z - P_z) = 0,$$

hvor F_x indikerer F differentieret i forhold til x, hvilket er tilsvarende for F_y og F_z. Endvidere er P_x første koordinaten i P, tilsvarende for P_y anden koordinat og P_z tredje koordinat. Vi finder:

$$\nabla F(P) = \langle 2\cdot 1\cdot \cos(0), \quad 2\sin(0)+2\cdot 1, \quad -2\cdot 1\rangle = \langle 2\cdot 1\cdot 1, \quad 2\cdot 0+2, \quad -2\rangle = \langle 2,2,-2\rangle$$

Vi må skalere (dividere og gange ikke-nul konstant på) $\nabla F(P)$, når det er for at bruge den i tangentplanets ligning. Jeg vælger skaleringen:

$$\nabla F(P) = 2\langle 1,1,-1\rangle.$$

Jeg bruger kun vektoren:

$$1(x-0) + 1(y-1) - 1(z-1) = 1x + y - 1 - z + 1 = x + y - z = 0.$$

Lægger vi z til på begge sider fås:

$$x + y = z$$

c. Fra ligningen $F(x,y,z) = 0$, hvad er den partielle afledede $\frac{\partial z}{\partial x}$ i punktet P?

Vi har, at (vi kan genbruge skaleringen, men vi kan også bruge original-værdierne, det giver det samme):

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} = -\frac{2}{-2} = -(-1) = 1.$$

Opgave 9

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \sin(xy),$$

hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a. Kan $f(x, y)$ ikke blive mindre end nul?

Jo, det kan den godt. Vi kan blot vælge $x = \frac{3}{2}$ og $y = \pi$. Så er

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1.$$

Vi har kun begrænset x og y nedadtil. Så hvis vi ville, kunne vi bare restringere $x = 1$ og $y \in [0, 2\pi]$, hvilket ville give os alle værdier, sin kan give. Og sinus ligger mellem -1 og 1.

b. Bliver $f(x, y)$ aldrig lig med $1/2$?

Jo den gør så, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Dermed kan vi bare vælge $x = 1$ og $y = \frac{\pi}{6}$.

c. Hvad er den retningsafledede $D_u f(P)$ i punktet $P = (0, 1)$ og retning givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \langle 0, 1\rangle$?

Vi differentierer f i forhold til både x og y:

$$\nabla f(x, y) = \langle y\cos(xy), \quad x\cos(xy)\rangle.$$

Bemærk, at kædereglen er brugt. Vi indsætter P:

$$\nabla f(0, 1) = \langle 1\cos(0 \cdot 1), \quad 0\cos(0 \cdot 1)\rangle = \langle 1, 0\rangle.$$

Vi prikker nu $\mathbf{u} \cdot \nabla f(P)$:

$$D_u f(P) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(P) = \langle 0, 1\rangle \cdot \langle 1, 0\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

d. Bestem den retning hvor f vokser hurtigst i punktet P.

Vi benytter formlen:

$$\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \frac{\langle 1, 0\rangle}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{\langle 1, 0\rangle}{1} = \langle 1, 0\rangle.$$

Opgave 10

En funktion givet ved
$$f(x) = \sin(x^2)$$
for alle reelle tal x.

a. Bestem $f''(x)$.

Vi differentierer ved brug af kædereglen:
$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2).$$

Nu bruger vi kædereglen og produktreglen:
$$f''(x) = (2x)' \cdot \cos(x^2) + 2x \left(\cos(x^2)\right)' = 2 \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot (-2x \sin(x^2)) = 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2).$$

b. Bestem anden ordens Taylor polynomiet for f med udviklingspunkt $x = 0$.

Vi benytter formlen:
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)(x-0)^2 = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) x^2.$$

Vi finder de manglende værdier:
$$f(0) = \sin(0^2) = \sin(0) = 0, \quad f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2) = 0, \quad f''(0) = 2\cos(0^2) - 4 \cdot 0^2 \cdot \sin(0^2) = 2 - 0 = 2.$$

Dermed fås:
$$P_2(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} 2x^2 = x^2$$

Opgave 11

En kurve i planen er givet ved

$$x(t) = 2t + 1$$
$$y(t) = \sin(t)$$

for alle reelle tal t.

a. Bestem det t, hvor kurven går gennem punktet $P = (1, 0)$.

Vi vælger selvfølgelig at kigge på den bijektive funktion, $x(t)$, først, da en sådan funktion altid giver svaret med det samme:

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow 2t + 1 = 1 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{0}{2} = 0.$$

Vi tjekker lige, at denne er korrekt for $y(t)$:

$$y(0) = \sin(0) = 0.$$

Yes. Det passer.

b. Bestem farten når $t = 0$.

Vi differentierer både $x(t)$ og $y(t)$ for at finde hastighedsvektoren:

$$x'(t) = 2, \quad y'(t) = \cos t.$$

Vi indsætter $t = 0$:

$$x'(0) = 2, \quad y'(0) = \cos(0) = 1.$$

Farten er givet ved kvadratroden af summen af de to værdier kvadreret:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

c. Bestem kurvens krumning i P.

Vi benytter formlen

$$\kappa(t) = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}.$$

Det kræver dog, at vi kender de dobbeltafledede. Vi får:

$$x''(t) = 0, \quad y''(t) = -\sin t.$$

Punktet P svarer præcis til $t = 0$, hvorfor vi kan bruge $t = 0$ for at finde krumningen i punktet. Vi indsætter dette i ovenstående afledede:

$$x''(0) = 0, \quad y''(0) = -\sin(0) = 0.$$

Da både $x''(0) = 0$ og $y''(0) = 0$ bliver hele tælleren i vores formel 0. Men nul divideret med 'whatever' giver også 0. Så krumningen bliver altså 0.

Opgave 12

Betragt det følgende begyndelsesværdiproblem

$$y'(x) = xy^2(x), \quad y(0) = 1.$$

a. Antag, at y løser den ovenstående ligning og definer

$$f(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

Hvilken ligning opfylder f?[1]

Først sætter vi lige $x = 0$ og bruger, at $y(0) = 1$, da y er løsningen til begyndelsesværdiproblemet. Vi får:

$$f(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dermed skal kravet være, at $f(0) = 1$! Vi frasorterer løsninger, hvor $f(0) = 0$.

Lad os nu differentiere f ved brug af kædereglen:

$$f'(x) = y'(x) \cdot \left(-\frac{1}{y^2(x)}\right) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Lad os nu tage udgangspunkt i differentialligningen givet i starten af opgaven. Denne kan vi dividere med $y^2(x)$ på begge sider:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = x.$$

Men det er jo præcis det, som fremgår i $f'(x)$. Vi indsætter denne nye værdi og får:

$$f'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -x.$$

Derfor har vi altså, at

$$f'(x) = -x, \qquad f(0) = 1.$$

b. Hvad er $y(x)$?

Vi integrerer nu $f'(x)$ og får:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int -x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + c.$$

Vi bruger nu betingelsen $f(0) = 1$:

$$f(0) = -\frac{1}{2}0^2 + c = c = 1.$$

Derfor fås:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{2 - x^2}{2}.$$

Vi har da:

$$y(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{2-x^2}{2}} = \frac{2}{2 - x^2}$$

[1] Det her er en sjov opgave! Jeg er fan! Det er en af de opgaver, hvor underviser ikke bare har taget tidligere opgaver og indsat nye tal. Bigups! (Elsker symbol-matematik.)