Besvarelser til Calculus
Reeksamen - 22. August 2017

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En funktion er defineret ved

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

for en reel parameter x.

a. Bestem den dobbelt afledede, $f''(x)$.

Anvend kædereglen:

$$(h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x),$$

hvor $h(y) = e^y$ og $g(x) = x^2$. Differentieres h i forhold til y og g i forhold til x fås:

$$h'(y) = e^y, \quad g'(x) = 2x.$$

Lad $y = g(x)$, hvorfor vi får:

$$f'(x) = (h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{(x^2)} \cdot 2x.$$

Vi husker, at $f(x) = e^{(x^2)}$, hvorfor $f'(x)$ kan skrives som $2x \cdot f(x)$. Det ses, at $f'(x)$ er et produkt af to funktioner: $2x$ og $f(x)$. Dermed kan produktreglen (for to funktioner, vi kalder p og q) benyttes:

$$(p(x) \cdot q(x))' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x).$$

I vores tilfælde er $p(x) = 2x$ og $q(x) = f(x)$. Dermed er

$$p'(x) = 2, \qquad q'(x) = f'(x) = 2xe^{(x^2)} \cdot .$$

Hvorfor vi får

$$f''(x) = 2 \cdot e^{(x^2)} + 2x \cdot 2xe^{(x^2)} = 2e^{(x^2)} + 4x^2e^{(x^2)} = (2 + 4x^2)e^{(x^2)}.$$

Det kan bemærkes, at $f''(x) = (2 + 4x^2)f(x)$.

b. Bestem anden ordens Taylor polynomiet med udviklingspunkt i $x = 1$.

Det generelle anden ordens Taylor polynomiet er givet ved:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}f''(a) \cdot (x - a),$$

hvor a er udviklingspunktet. Vi har:

$$f(1) = e^{(1^2)} = e, \quad f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1) = 2e, \quad f''(1) = (2 + 4 \cdot 1^2)f(1) = 6e.$$

Dermed opnås følgende:

$$P_2(x) = e + 2e(x - 1) + \frac{1}{2}6e(x - 1) = e + 2e(x - 1) + 3e(x - 1).$$

Opgave 2

En kurve i planen er givet ved

$$x = t^2$$
$$y = 2t^3,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

a. For hvilken værdi af t går kurven gennem punktet $P = (1, 2)$.

Betragt $y = 2t^3$. Isoleres t i denne fås:

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

Dermed kan y-koordinaten 2 indsættes:

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}2} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Vi kan lige prøve at smide $t = 1$ ind i ligningen for x for at se, om det rent faktisk giver det 1-tal, vi skal have:

$$x = 1^2 = 1.$$

Yes. Punktet passer altså med $t = 1$.

Bemærk: Jeg valgte at betragte y, da $t = \pm\sqrt{x}$, hvorfor vi kun ville have to mulige værdier. Her sikrede y derimod én værdi, da t var opløftet i en ulige potens, 3.

b. Angiv en hastighedsvektor for kurven i punktet P.

Vi differentierer blot x og y i forhold til t og indsætter punktet P's tilsvarende t-værdi, hvilket er $t = 1$. Vi har:

$$x'(t) = 2t \Rightarrow x'(1) = 2, \qquad y'(t) = 6t^2 \Rightarrow y'(1) = 6 \cdot 1^2 = 6.$$

Hermed bliver hasighedsvektoren for kurven til $t = 1$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Bestem kurvens krumningsnradius $\rho(P) = \frac{1}{\kappa(P)}$ i punktet P.

Vi husker formlen for krumning:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}.$$

Vi skal altså først finde den anden ordens afledede for x og y:

$$x''(t) = 2 \Rightarrow x''(1) = 2, \qquad y''(t) = 12t \Rightarrow y''(1) = 12 \cdot 1 = 12.$$

Dermed fås:

$$\kappa = \frac{2 \cdot 12 - 2 \cdot 6|}{\sqrt{2^2 + 6^2}^3} = \frac{24 - 12|}{\sqrt{4 + 36}^3} = \frac{12}{\sqrt{40}^3}.$$

Da det er ρ vi skal finde, fås:

$$\rho(P) = \frac{1}{\kappa(P)} = \frac{\sqrt{40}^3}{12} = \frac{\sqrt{40}^2 \cdot \sqrt{40}}{12} = \frac{40\sqrt{40}}{12} = \frac{4 \cdot 10\sqrt{4 \cdot 10}}{4 \cdot 3} = \frac{10\sqrt{4}\sqrt{10}}{3} = \frac{20\sqrt{10}}{3}.$$

Opgave 3

En kurve i rummet er givet ved

$$x = t,$$
$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}t^2,$$
$$z = t^3,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

a. Bestem et udtryk for farten, $v(t)$.

Farten er givet ved formlen

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Vi udregner altså først de første ordens afledede:

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \sqrt{6}t, \quad z'(t) = 3t^2.$$

Derme fås:

$$v(t) = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6}t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{1^2 + 6t^2 + (3t^2)^2}.$$

Vi bemærker, at $6t^2$ er det dobbelte produkt af 1 og $3t^2$, derudover er både 1 og $3t^2$ blevet kvadreret i udtrykket. Husk kvadratsætningen, der siger $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Denne kan vi altså anvende:

$$v(t) = \sqrt{1^2 + 6t^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{(1 + 3t^2)^2} = 1 + 3t^2.$$

b. Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = 2$?

Her skal farten blot integreres i forhold til t med de givne grænser. Vi har:

$$\int_1^2 v(t)\,dt == \int_1^2 1+3t^2\,dt = \left[t + \frac{3}{3}t^3\right]_1^2 = \left[t + t^3\right]_1^2 = (2+2^3)-(1+1^3) = 10-2 = 8.$$

Opgave 4

En funktion f er defineret i første kvadrant $(x > 0, y > 0)$ ved

$$f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}.$$

Det oplyses, at grafen for funktionen er en opadgående skål - værdierne går mod ∞, når x eller y nærmer sig 0 eller vokser ud over alle grænser.

a. Find (d)et kritisk(e) punkt for funktionen f.

Jeg vælger at differentiere og sætte de afledede lig 0. Først vil jeg dog påpege, at jeg altid omskriver brøker, da $1/x = x^{-1}$. Det er lettere for mig at huske differentiering af denne type:

$$f(x,y) = x + 8y + (xy)^{-1}.$$

Så kan kædereglen anvendes, da den ydre funktion er $\hat{(}$-1) og den indre er xy. Vi har:

$$f_x(x,y) = 1 - 1(xy)^{-2}y = 1 - \frac{y}{x^2y^2} = 1 - \frac{1}{x^2y},$$

$$f_y(x,y) = 8 - 1(xy)^{-2}x = 8 - \frac{x}{x^2y^2} = 8 - \frac{1}{xy^2}.$$

For at finde et kritisk punkt skal vi finde de x- og y-værdier, der opfylder $f_x(x,y) = 0$ og $f_y(x,y) = 0$. Vi isolerer først y i $f_x(x,y) = 0$:

$$1 - \frac{1}{x^2y} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x^2y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2}.$$

Denne værdi for y kan så indsættes i $f_y(x,y) = 0$, hvori x kan isoleres:

$$8 - \frac{1}{x\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = 8 - \frac{1}{x\frac{1}{x^4}} = 8 - \frac{1}{\frac{1}{x^3}} = 8 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2.$$

Det vil sige, at der kun er kritiske punkter i $x = 2$. Denne kan så indsættes i det udtryk, vi fandt for y:

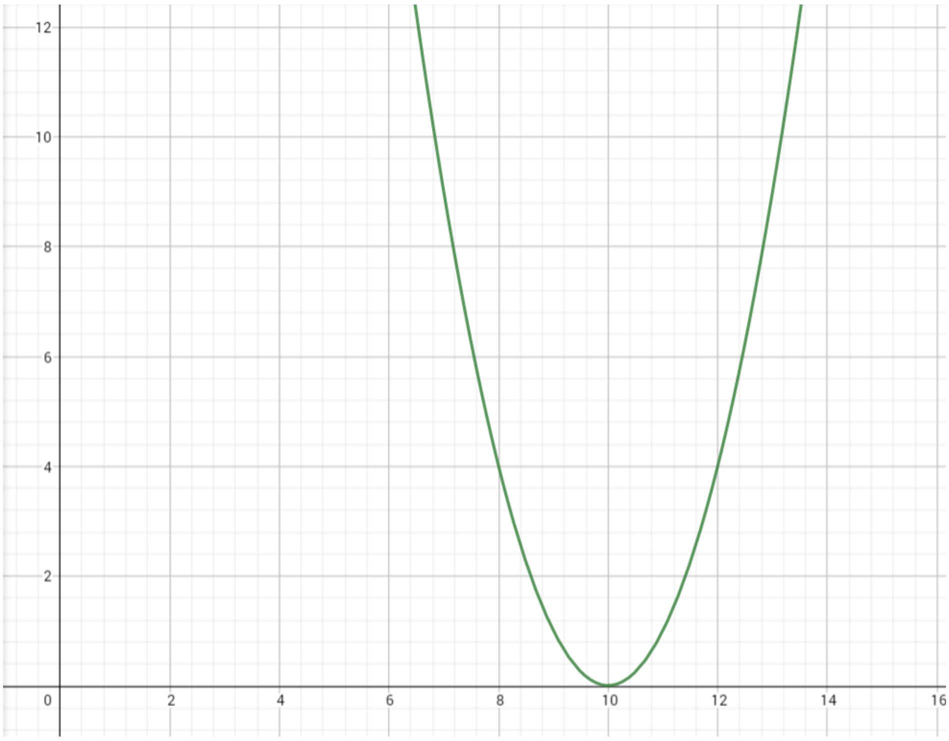
$$y = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Der er altså KUN ét kritisk punkt, og det er i punktet $(2, \frac{1}{4})$.

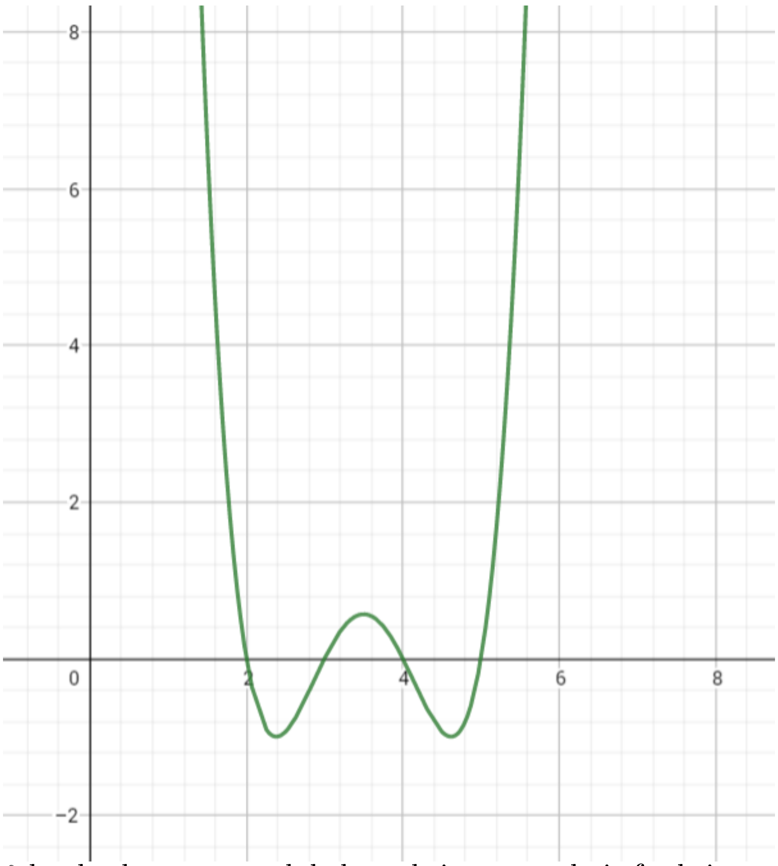
b. Bestem hvilken af udsagnende, der er det korrekte.

Vi ved betragter i opgaven kun funktionen i den første kvadrant (positive x- og y-værdier). Vi ved, at fladen danner en opadgående skål. Altså vokser denne mod uendelig i alle retninger i først kvadrant. Der eksisterer altså IKKE et global maksimum, da vi altid kan finde en større værdi.

Følgende figur viser en funktion med ét kritisk punkt samtidig med, at den danner en opadgående skål (dog kun en to-dimensionel graf).

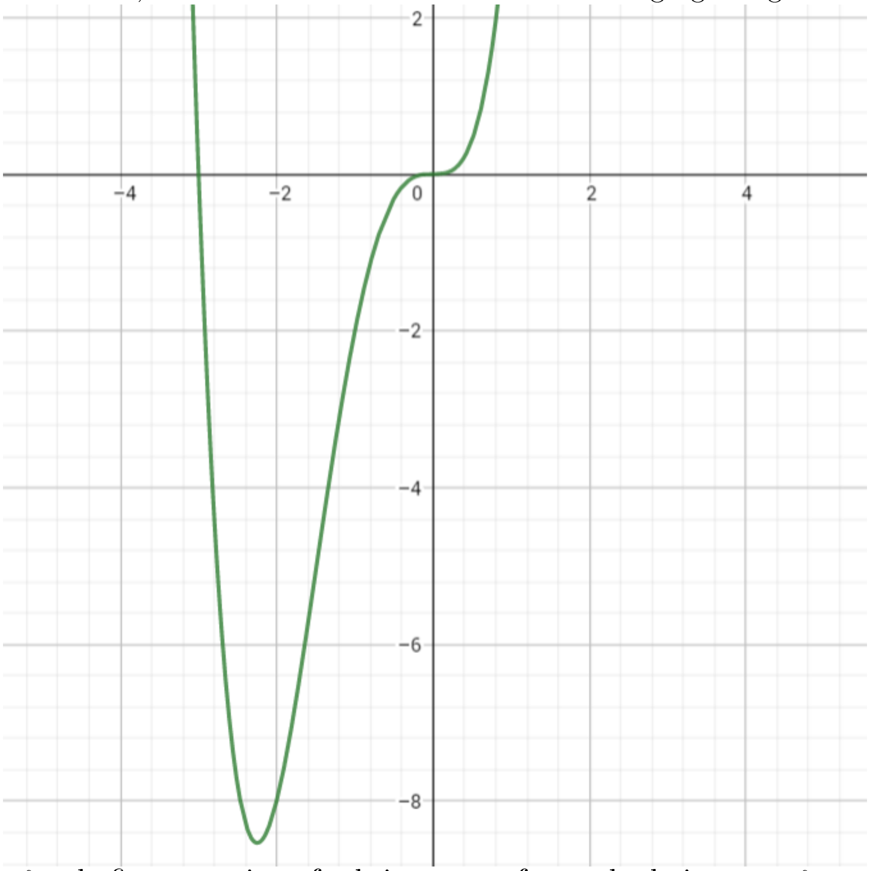


'Okay, okay, Mikkel, men kan det så være et lokalt maksimum?' Nej, kig på følgende figur:



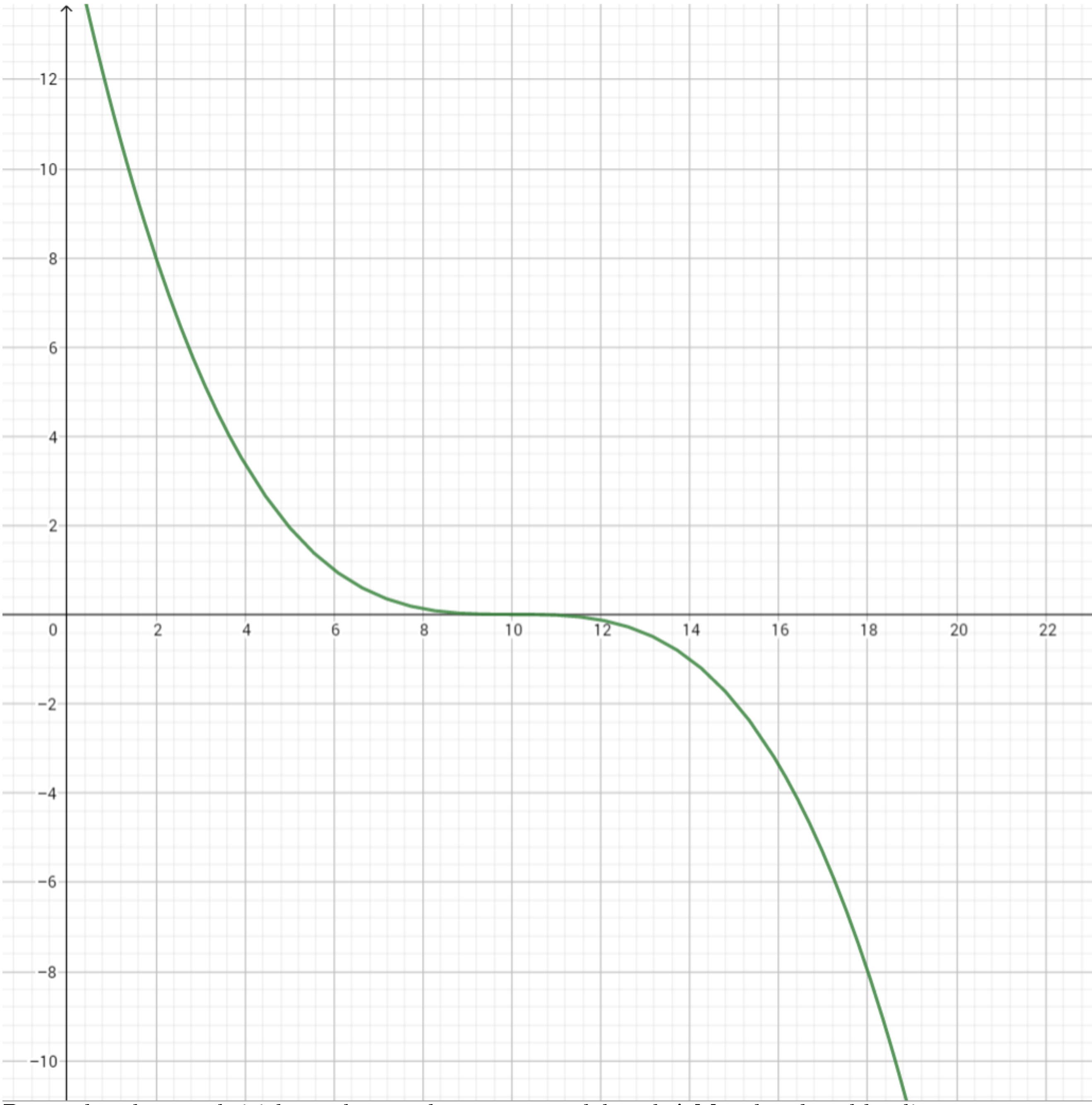
Den eneste måde, der kan være et lokalt maksimum er, hvis funktionen aftager i alle retninger omkring dette maksima. Men hvis vi ved, at funktionen skal vokse mod uendeligt i alle retninger, betyder dette, at der må være steder, hvor funktionen vender - det vil sige lokale minima. Men 'vendepunkter' karakteriserers også ved, at de er kritiske punkter, og vi fandt udelukkende ét kritisk punkt for funktionen i opgave a. Dermed kan der ikke eksistere et maksimum, hverken globalt eller lokalt.

'Meeeen siger du så, at det kan være et saddelpunkt?' Næ, det gør jeg skam ikke. Et saddelpunkt kræver, at funktionen er voksende i en retning og aftagende i en anden.



I ovenstående figur ser vi, at funktionen er aftagende, hvis man går mod venstre fra sadelpunktet. Ligeledes er funktionen voksende, hvis man går til højre for sadelpunktet. Det ses, at i den aftagende retning venter et (lokalt og globalt) minimum. Men i dette tilfælde har vi altså to kritiske punkter, hvilket ikke er vores tilfælde, hvor vi kun har ét!

'Kan vi så helt udelukke sadelpunkter?' Ikke endnu! Kig på følgende figur:



Denne har kun ét kritisk punkt, og dette er et sadelpunkt! Men hvad gælder lige præcis i dette tilfælde? Jo, funktionen går mod minus uendeligt, når x går mod uendeligt. Ligeledes går funktionen mod uendeligt, når x går mod uendeligt. Det vil sige, at der findes kun ét kritisk punkt, som også er et sadelpunkt, når funktionen hverken har et globalt maksimum eller minimum i det område, der betragtes. Det er så her, vi husker, at vores funktion danner en skål, der vokser mod uendeligt i alle retninger (når $x \to 0$ eller $y \to 0$ eller $x \to \infty$ eller $y \to \infty$). Vi ved ydermere, at $x > 0$ og $y > 0$, hvorfor vores funktion $f(x, y)$ ikke kan blive negativ (der indgår ingen minusser i funktionen). Derfor kan vores funktion ikke stikke af mod $-\infty$ (eller blive negativ i det hele taget). Der er ingen problemer med singulariteter i de kvadrantets indre punkter - udelukkende i randen, som er givet til at vokse mod uendeligt.

'Godt, så det skal være et minimum. Men er det udelukkende lokalt, eller er det også globalt?' Jamen er det ikke simpelt? Vi har etableret, at der kun er problemer på randen i forhold til singulariteter, hvorfor der altså må være tale om et GLOBALT minimum. Skulle det ikke have været et globalt minimum, skulle vi døje med singulariteter i de indre punkter, eller også skulle der have været et andet kritisk punkt, som var et minimum. Men begge påstande er skudt i jorden.

'Okay, der er to muligheder tilbage, hvad gør jeg?' Du indsætter bare det kritiske punkt (aka. globale minimum) i funktionen f:

$$f\left(2,\frac{1}{4}\right) = 2 + 8\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 + \frac{8}{4} + \frac{1}{\frac{2}{4}} = 2 + 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Svaret skulle nu være åbenlyst.

Opgave 5

En funktion er givet ved
$$f(x,y) = \frac{y}{x^2}.$$

a. Funktionen f har en definitionsmængde. Hvilken mængde af punkter er ikke inkluderet i denne?

Vi spørger os selv: 'Hvilke værdier brokker den her funktion sig ved?', og vi svarer prompte: 'Det er sgu ikke for godt, hvis nævneren i en brøk bliver 0!'. Derfor er funktionen ikke defineret for $x^2 = 0$. Vi isolerer x og får, at $x = 0$. Altså er alle punkter, hvor $x = 0$ ikke inkluderet i definitionsmængden! Hvad med y? Den kan bare variere frit, hvis x er på 0, så har vi katastrofen uanset, hvilken værdi y har. Det er derfor y-aksen, som vi ikke må have med i vores definitionsmængde.

b. Beskriv niveaukurven for $f(x,y) = 2$.

Vi sætter altså funktionen lig 2:
$$f(x,y) = \frac{y}{x^2} = 2.$$
Lad os gange med x^2 på begge sider:
$$y = 2x^2.$$
Vi ser altså en parabel, der har en positiv koefficient for x^2. En positiv koefficient for x^2 betyder en glad parabel - grenene vender opad. Vi skal bare lige huske, at $x = 0$ ikke er defineret for f, derfor er Origo heller ikke med for funktionen. Grunden til, at det kun er Origo, vi fjerner er, at $y = 2 \cdot 0^2 = 0$, hvorfor $(0,0)$ er det eneste tal, vi ikke kunne lide fra opgave a, der er repræsenteret ved niveaukurven.

c. Beskriv niveaukurven for $f(x,y) = 0$.

Vi gør det samme som før:
$$f(x,y) = \frac{y}{x^2} = 0.$$
Gang med x^2 på begge sider:
$$y = 0x^2 = 0.$$
Vi kræver altså, at $y = 0$, hvilken er x-aksen. Vi husker dog stadig på, at $x \neq 0$, så vi fraregner Origo.

Opgave 6

Et rumligt legeme L afgrænses af trekanten i XY-planen givet ved $x \leq 0$, $y \geq 0$ og $y \leq x+1$ samt fladen givet ved $z = 1 - x^2 - y^2$.

a. Hvilke af de følgende integraludtryk beregner legemets rumfang/volumen?

Det første integraludtryk indeholder kun et enkelt integral men to integrationsvariable. Denne giver altså ikke mening.

Dernæst haves

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1}(1-x^2-y^2)\,dy\,dx.$$

Denne er en direkte omsætning af opgaveteksten til matematik. Der er altså intet at sætte en finger på. Betragtes $y \leq x+1$ kan vi trække 1 fra på begge sider og få $y-1 \leq x$. Vi ved, at x er nedadtil begrænset af $y-1$, derfor skal vi vælge den mindste værdi for y for at finde den absolutte nedre grænse. Vi ved, at y er nedadtil begrænset af 0, hvor $0-1=-1 \leq x$. Altså haves grænserne $-1 \leq x \leq 0$ og $0 \leq y \leq x+1$.

Fra før havde vi $y-1 \leq x$. Vi ved ydermere, at x skal være mindre end nul. Derfor kan y, som er opadtil begrænset af $x+1$ maksimalt blive 1, da vi skal gøre x så stort som muligt. Dermed kan grænserne også skrives som $0 \leq y \leq 1$ og $y-1 \leq x \leq 0.$, hvorfor

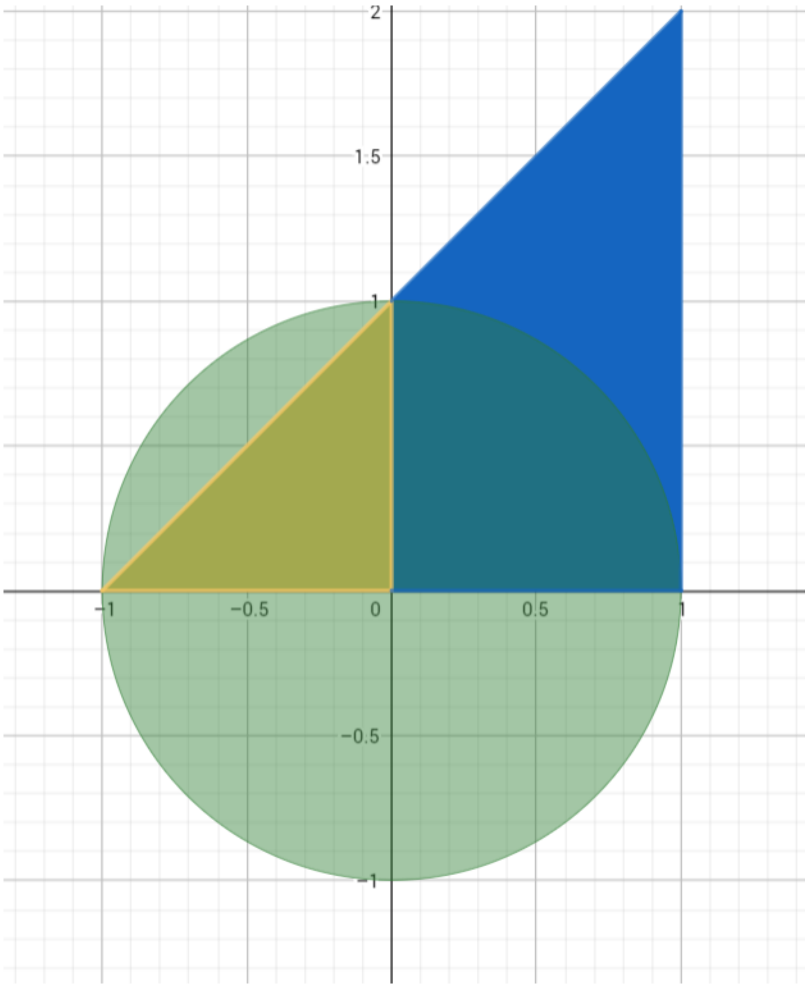
$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1}(1-x^2-y^2)\,dy\,dx.$$

er et gyldigt udtryk for volumen af legemet L.

For integraludtrykket

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x+1}(1-x^2-y^2)\,dy\,dx,$$

bør vi lige indse et par ting. Først $1-x^2-y^2$ er en parabloide i rummet, der vender nedad. (Forestil dig kuppel, der rammer XY-planet.) Denne kupel er symmetrisk omkring Origo, så vi skal finde ud af, om det område, vi kigger på, er magen til det, der er beskrevet i udtrykket. Områderne er skitseret i figuren på næste side. Det gule område er de x- og y-værdier vi faktisk vil have. De blå område er de x- og y-værdier, som vi regner med i det sidste integraludtryk. Vi ser altså, at der ikke er en symmetrisk overensstemmelse. Cirklen er en projektion af $z = 1-x^2-y^2$ ned på XY-planen.



b. Hvad er legemets rumfang/volumen?

Vi vælger et af de godkendte integraler til at regne videre på:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1}(1-x^2-y^2)\,dy\,dx &= \int_{-1}^{0}\left[(1-x^2)y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{x+1}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}(1-x^2)(x+1)-\frac{1}{3}(x+1)^3\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}x+1-x^3-x^2-\frac{1}{3}(x^3+3x^2+3x+1)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}-x^3-x^2+x+1-\frac{1}{3}x^3-x^2-x-\frac{1}{3}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}-\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{2}{3}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x\right]_{-1}^{0} \\
&= 0-\left(-\frac{1}{3}(-1)^4-\frac{2}{3}(-1)^3+\frac{2}{3}(-1)\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Opgave 7

Et rumligt legeme T har form af et tetraeder afgrænset af fire planer; det er givet ved $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ og $x+y+z \leq 1$ og har en massetæthed (densitet) $\delta(x,y,z) = x$. Hvad er massen af T?

Svar:

Vi skal have opstillet et triple-integral, hvor vi integrerer densiteten, dvs. x.

Vi skal først have opstillet grænserne. Betragt $x+y+z \leq 1$. Vi kan trække x og y fra på begge sider og få:

$$z \leq 1 - x - y.$$

Dermed er

$$0 \leq z \leq 1 - x - y,$$

hvorfor grænserne for integralet, der integrerer i forhold til z, er fundet. Men hvad ved vi mere? Jo, fra disse grænser, ser vi, at

$$0 \leq 1 - x - y \Leftrightarrow y \leq 1 - x.$$

Vi har altså brugt grænserne for z til at sige noget om grænserne for y. Vi ved nu, at

$$0 \leq y \leq 1 - x,$$

hvorfor grænserne for integralet, der integrerer over y, er fundet. Slutteligt kan vi bruge disse grænser til at opstille dem for x:

$$0 \leq 1 - x \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Vi opsummerer altså grænserne:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1 - x, \qquad 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

Dermed kan integralerne til udregning af massen opstilles:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)x \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} x - x^2 - yx \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[(x - x^2)y - \frac{1}{2}y^2 x \right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 (x - x^2)(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 x \, dx \\
&= \int_0^1 x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{1}{2}(1 - 2x + x^2)x \, dx \\
&= \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 - \frac{1}{2}(x - 2x^2 + x^3) \, dx \\
&= \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 \, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}1^2 - \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{8}1^4 - 0 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{6}{24} - \frac{8}{24} + \frac{3}{24} \\
&= \frac{6 - 8 + 3}{24} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Opgave 8

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \ln(y - x^2).$$

a. Funktionen f har en definitionsmængde. Angiv HELE definitionsmængden.

I situationer med definitionsmængder spørger vi os altid: 'Hvor kan det gå galt og for hvilke værdier, går det galt?'. Betragter vi den yderste funktion ln, ved vi, at denne kun må tage argumenter, der er strengt større end 0. Dvs. definitionsmængden for funktionen $\ln(z)$ er $z > 0$. I vores tilfælde svarer z så til $y - x^2$. Vi har altså

$$y - x^2 > 0 \Leftrightarrow y > x^2.$$

Dermed har vi svaret på spørgsmålet.

b. Bestem den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x, y)$.

Vi benytter kædereglen og har ved differentiation af x:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{y - x^2} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{y - x^2}.$$

For min egen skyld omskriver jeg dette udtryk (jeg kan som beskrevet tidliger bedst lide at differentiere potenser):

$$f_x(x, y) = -2x(y - x^2)^{-1}.$$

Nu differentieres $f_x(x, y)$ i forhold til y ved brug af kædereglen, og der fås:

$$f_{xy}(x, y) = -2x \cdot (-1) \cdot (y - x^2)^{-2} \cdot 1 = 2x(y - x^2)^{-2} = \frac{2x}{(y - x^2)^2}.$$

c. Bestem gradientvektoren $\nabla f(P)$ for funktionen f i punktet $P = (1, 2)$.

Vi har differentieret f i forhold til x, så vi mangler blot at differentiere f i forhold til y. Vi bruger kædereglen igen:

$$f_y(x, y) = \frac{1}{y - x^2} \cdot 1 = \frac{1}{y - x^2}.$$

Vi kan nu opstille gradientvektoren i P:

$$\nabla f(P) = \begin{bmatrix} f_x(P) \\ f_y(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2 \cdot 1}{2-1^2} \\ \frac{1}{2-1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d. Bestem den retningsafledede $D_u f(P)$ for f i punktet P samt retningen givet ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = (0.8, -0.6)$.

Vi har, at:

$$D_u f(P) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(P) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \cdot 0.8 + 1 \cdot (-0.6) = -1.6 - 0.6 = -2.2.$$

e. Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f i puntket $Q = (1, 2, 0)$.

Da $Q = (P, f(P))$ har vi allerede de fornødne oplysninger til at opstille tangentplanen. Vi skal blot bruge formlen:

$$z = f_x(P)(x - P_x) + f_y(P)(y - P_y) + f(P).$$

Dermed haves:

$$z = -2(x - 1) + 1(y - 2) + 0 = -2x + 2 + y - 2 = -2x + y.$$

Opgave 9

En flade $\mathcal{S}$ er bestemt ved ligningen

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

a. Hvilken af punkterne ligger på fladen?

Punktet $(1, 0)$ giver ikke mening, da denne ikke har specificeret den sidste dimension.

$$F(1, 0, 0) = 1^2 + 0^2 - 0^2 = 1.$$

hvormed $(1, 0, 0)$ ligger på fladen.

$$F(1, 1, 1) = 1^2 + 1^2 - 1^2 = 1 + 1 - 1 = 1,$$

hvormed $(1, 1, 1)$ ligger på fladen.

$$F(2, 2, -3) = 2^2 + 2^2 - (-3)^2 = 4 + 4 - 9 = -1,$$

hvorfor $(2, 2, -3)$ ikke ligger på fladen.

$$F(3, 4, 5) = 3^2 + 4^2 - 5^2 = 9 + 16 - 25 = 0,$$

hvorfor $(3, 4, 5)$ ikke ligger på fladen.

$$F(-1, -1, 0) = (-1)^2 + (-1)^2 - 0^2 = 2,$$

hvorfor $(-1, -1, 0)$ ikke ligger på fladen.

b. Hvilken af vektorerne står vinkelret på $\mathcal{S}$s tangentplan i punktet $P = (1, 1, -1)$?

Det kan ikke være $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, da denne ikke har dimensionerne til det.

De vektorer, der står vinkelrette på fladens tangentplan i punktet P er alle skalerede versioner af

$$\begin{bmatrix} F_x(P) \\ F_y(P) \\ F_z(P) \end{bmatrix}.$$

Vi finder altså først $F_x(P)$, $F_y(P)$ og $F_z(P)$:

$$F_x(x, y, z) = 2x \Rightarrow F_x(P) = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$F_y(x, y, z) = 2y \Rightarrow F_y(P) = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$F_z(x, y, z) = -2z \Rightarrow F_z(P) = -2 \cdot (-1) = 2.$$

Dermed ved vi nu, at

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en af de vektorer, vi søger. Men alle resulterende vektorer efter skalarmultiplikation på denne er også svar, da skalarmultiplikation kun ændrer længden af vektorer og ikke retningen. Hvis en vektor står vinkelret på, så er vi altså ligeglade med, om den er 1 centimeter lang, eller om den milliarder af lysår lang. Da

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix},$$

har vi fundet de to løsninger.

Den sidste vektor er ikke en løsning, for vi kan ikke gange vektoren med et tal, således både 2 bliver til 2 samtidig med, at vi ganger 2 med samme tal og får -2.

c. Bestem for hvilke punkter, at tangentplanen til $\mathcal{S}$ er parallel med tangentplanen $z = x + y$.

Den generelle ligning for tangentplaner for flader i rummet er:

$$F_x(Q)(x - Q_x) + F_y(y - Q_y) + F_z(z - Q_z) = 0.$$

Lad os omskrive $z = x + y$ til denne form:

$$x + y - z = 0.$$

Da planerne blot skal løbe parallelt med $x+y-z = 0$ er vi ligeglade med konstanterne - vi vil kun fokusere på hældningskonstanterne af parametrene. Vi ser, at i $x+y-z = 0$ er $F_x = 1$, $F_y = 1$ og $F_z = -1$. For at vores Q har en parallel tangentplan, skal vi altså have, at

$$F_x(Q) = F_y(Q) = -F_z(Q).$$

Betragtes første lighed har vi, at

$$F_x(Q) = F_y(Q) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y.$$

Dermed skal x- og y-koordinaterne være ens, hvis disse to hældninger skal være ens. Betragtes anden lighed fås:

$$F_y(Q) = -F_z(Q) \Leftrightarrow 2y = -(-2z) = 2z \Leftrightarrow y = z.$$

Altså kræver vi også, at $y = z$ for at $F_y(Q) = F_z(Q)$. Men det betyder, at $x = y = z$, samt at vores punkter skal kunne skrives på formen $Q = (x, x, x)$. Det ses let, at dette kun gælder for $(1, 1, 1)$ og $(-1, -1, -1)$.

Opgave 10

Et komplekst tal z har polær form $\sqrt{2}e^{\pi i/4}$.

a. Hvad z på standard form?

Vi bruger formlen

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

og dermed fås for $y = \pi/4$:

$$\sqrt{2}e^{\pi i/4} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{2} + i\frac{2}{2} = 1 + i.$$

b. Hvad er $z\bar{z}$ på polær form?

Vi er heldige. $z\bar{z}$ er altid et reelt tal, da $z\bar{z} = |z|^2$. Ydermere kan vi aflæse længden af z fra den polære form - det vil sige $\sqrt{2}$. Så det eneste, vi skal gøre, er at kvadrere denne $\sqrt{2}^2 = 2$. Vores polære form for $z\bar{z}$ er altså 2.

c. Hvad er $\bar{z}/z$ på standard form?

Vi har:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2}{2} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1^2 + i^2 - 2i}{2} = \frac{1 - 1 - 2i}{2} = -i.$$

d. Hvad er $\bar{z}/z$ på polær form?

Vi kan blot konjugere den polære form af z ved at sætte et minus foran vinklen. Vi har altså:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2}e^{\pi i/4}} = \frac{e^{-\pi i/4}}{e^{\pi i/4}} = e^{-\pi i/4 - \pi i/4} = e^{-2\pi i/4} = e^{-\pi i/2} = e^{3\pi/2}.$$

Ved sidste udregning så husk, at vi altid blot kan lægge 2π til en vinkel så mange gange, vi vil. Det svarer bare til at gå en ekstra omgang i cirklen.

Opgave 11

En homogen differentialligning er givet ved

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

a. Bestem den fuldstændige løsning.

Vi løser den karakteristiske ligning:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 \Leftarrow r = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3.$$

Vi finder altså kun en rod, og denne er 3. Den fuldstændige løsning bliver da:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}.$$

b. Bestem $y(0)$ til begyndelsesværdiproblemet $y(1) = 3e^3$, $y'(1) = 10e^3$.

Hvad sker der, hvis vi indsætter 0 på t's plads i den fuldstændige løsning?

$$y(0) = c_1 e^{3 \cdot 0} + c_2 \cdot 0 e^{3 \cdot 0} = c_1.$$

Vi skal altså blot finde c_1. Vi bruger, at $y(1) = 3e^3$.

$$y(1) = c_1 e^{3 \cdot 1} + c_2 \cdot 1 e^{3 \cdot 1} = c_1 e^3 + c_2 e^3 = 3e^3.$$

Divider med e^3 på begge sider, og vi opnår:

$$c_1 + c_2 = 3 \Leftrightarrow c_2 = 3 - c_1.$$

Lad os differentiere vores $y(t)$, husk at bruge produktreglen:

$$y'(t) = 3c_1 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t} + c_2 e^{3t} = 3c_1 e^{3t} + 3(3 - c_1) t e^{3t} + (3 - c_1) e^{3t}.$$

Dermed fås ved brug af begyndelsesbetingelserne

$$y'(1) = 3c_1 e^3 + 3(3 - c_1) e^3 + (3 - c_1) e^3 = 10e^3.$$

Divider med e^3 på begge sider:

$$3c_1 + 3(3 - c_1) + (3 - c_1) = 3c_1 + 9 - 3c_1 + 3 - c_1 = -c_1 + 12 = 10 \Leftrightarrow c_1 = 2.$$

Da $y(0) = c_1 = 2$ er opgaven løst.

Hvilke af funktionerne udgør en (partiel) løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' - 6y' + 9y = 9t + 3.$$

Lad os teste om den første svarmulighed passer:

$$(t+1)' = 1, \qquad (t+1)'' = 0.$$

Indsættes denne på venstre side:

$$0 - 6 \cdot 1 + 9(t+1) = 9t + 9 - 6 = 9t + 3.$$

Altså er $t+3$ altså en partikulær løsning. Dermed kan $t^2 + t/2 - 1$ og $9t + 17/3$ ikke være partikulære løsninger. Vi husker, at vi ikke kun skal finde partikulære løsninger. Da den fuldstændige løsning hed $c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$. Vi kan vælge c_1 og c_2 til hvad vi vil, når begyndelsesbetingelser ikke er givet (det var de KUN i opgave b). Så hvis vi vælger $c_1 = 1$ og $c_2 = 0$ og lægger den homogene løsning sammen med den partikulære, så fås løsningen $e^{3t} + t + 1$. Men samme fremgangsmåde kan bruges til at finde en anden specifik løsning. Lad $c_1 = 0$ og $c_2 = -2$, så er en komplet løsning også $-2te^{3t} + t + 1$.

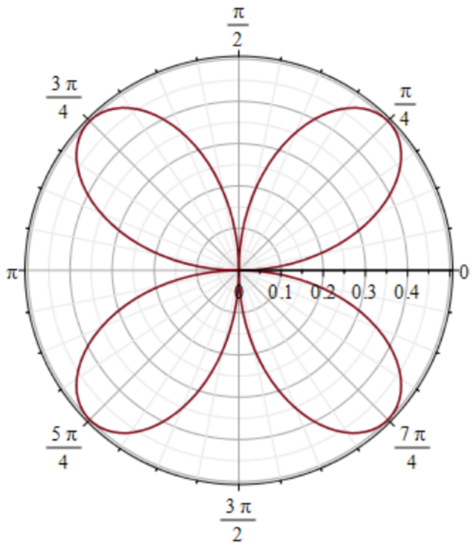
Kan vi så få den sidste mulighed? Nej, for selvom det er en specifik homogen løsning, så kan den homogene løsning altså ikke redegøre for en højre side, der ikke er 0. Vi skal altså have $t+1$ lagt til, før denne ville være en løsning.

Opgave 12

Figuren nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



En af forskrifterne for f svarer til figuren. Hvilken?

Svar:

Vi bruger udelukkelsesmetoden. Først bemærker vi, at den maksimale værdi for r er 0,5. Hvad er den maksimale værdi af cos og sin? Det er 1. Det vil altså sige, at funktionerne

$$\sin(\theta), \quad (\sin\theta)^2, \quad (\cos\theta)^2, \quad sin(2\theta),$$

ikke er mulige, da disse vil antage værdien 1 på et givent tidspunkt.

Vi er altså tilbage med funktionerne $\sin(2\theta)/2$ og $\sin(\theta)/2$. Lad os vælge en værdi af θ. Jeg vælger $\theta = \pi/4$.

$$\frac{\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sin\frac{pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Denne funktion er altså godkendt til $\theta = \pi/4$. Hvad med den anden funktion?

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Denne passer altså ikke til en radius på $1/2$. Den rigtige funktion er altså $\sin(2\theta)/2$.