Besvarelser til Calculus
Prøveeksamen - Marts 2016

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En plan kurve er givet ved

$$x = 1 + 2t^2,$$
$$y = 1 + t^3,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

a. Hvilket punkt på kurven svarer til parameterværdien $t = 1$?

Vi sætter blot $t = 1$ i ovenstående udtryk og får:

$$x = 1 + 2 \cdot 1^2 = 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3, \quad y = 1 + 1^3 = 1 + 1 = 2.$$

Altså giver $t = 1$ punktet $(3, 2)$.

b. Hvad er krumningen af kurven for $t = 1$?

Vi skal bruge formlen

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}.$$

Derfor kræver det, at vi finder første- og andenordens afledede for x og y:

$$x'(t) = 4t, \quad x''(t) = 4, \quad y'(t) = 3t^2, \quad y''(t) = 6t.$$

Indsættes i formlen fås

$$\kappa = \frac{|4t \cdot 6t - 4 \cdot 3t^2|}{\sqrt{(4t)^2 + (3t^2)^2}^3} = \frac{|24t^2 - 12t^2|}{\sqrt{16t^2 + 9t^4}^3} = \frac{12t^2}{\sqrt{16t^2 + 9t^4}^3}.$$

Sætter vi nu $t = 1$ fås:

$$\kappa(t) = \frac{12 \cdot 1^2}{\sqrt{16 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1^4}^3} = \frac{12}{\sqrt{16 + 9}^3} = \frac{12}{\sqrt{25}^3} = \frac{12}{5^3} = \frac{12}{125}.$$

Opgave 2

En kurve i rummet er givet ved

$$x = \cos(2t), y = \sin(2t), z = t^2 + 1,$$

hvor paramteren t gennemløber de reelle tal.

Find det korrekte udtryk for buelængden.

Det generelle udtryk for buelængden af en kurve i rummet er givet ved

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Vi har givet, at $a = 0$ og $b = 3$. Vi differentierer nu x, y og z med hensyn til t og får:

$$x'(t) = -2\sin(2t), \quad y'(t) = 2\cos(2t), \quad z'(t) = 2t.$$

Indsættes det i formlen fås:

$$\int_0^3 \sqrt{(-2\sin(2t))^2 + (2\cos(2t))^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^3 \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 4t^2}\, dt.$$

Vi kan nu samle 4 uden for parentes, og ved brug af idiotformlen, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, får vi:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 4t^2}\, dt &= \int_0^3 \sqrt{4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t) + t^2)}\, dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{4(1 + t^2)}\, dt.\end{aligned}$$

Ved multiplikation, kan man splitte kvadratrødder op, altså

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{(b)},$$

hvilket giver os:

$$\int_0^3 \sqrt{4(1 + t^2)}\, dt = \int_0^3 \sqrt{4}\sqrt{1 + t^2}\, dt = \int_0^3 2\sqrt{1 + t^2}\, dt,$$

hvilket er det ønskede udtryk.

Opgave 3

En funktion er defineret ved

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right).$$

Hvad er 2. ordens Taylor polynomiet for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$? Vi finder første og andenordens afledede af f og får ved brug af kædereglen og produktreglen:

$$f'(x) = 2x\frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = 2\frac{1}{1+x^2} - 2x\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Vi kan nu finde $f(a)$, $f'(a)$ og $f''(a)$ for $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln\left(1 + 0^2\right) = \ln(1) = 0, \\ f'(0) &= 2 \cdot 0\frac{1}{1+0^2} = 0, \\ f''(0) &= 2\frac{1}{1+0^2} - 2 \cdot 0\frac{2 \cdot 0}{(1+0^2)^2} = 2\frac{1}{1} = 2 \end{aligned}$$

Et Taylor polynomium af orden 2 er givet ved

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

hvormed vi altså har:

$$P_2(x) = 0 + \frac{0}{1}(x-0) + \frac{2}{2}(x-0)^2 = x^2.$$

Opgave 4

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2y, \quad y > 0.$$

Der er en entydig løsning $y(x)$ med begyndelsesværdi $y(0) = 3$.

Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

For første ordens differentialligninger på formen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

er den fuldstændige løsning givet ved

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx + Ce^{-P(x)},$$

hvor $P(x) = \int p(x)\, dx$, og $C \in \mathbb{R}$ er en konstant. Vi omskriver altså først vores differentialligning, så den kommer på den førnævnte form:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - 6x^2y = 0.$$

Vi ser altså, at $p(x) = -6x^2$, og $q(x) = 0$. Dette giver for $P(x)$:

$$P(x) = \int -6x^2\, dx = -\frac{6}{3}x^3 = -2x^3.$$

Vi ser bort fra konstanten i dette ubestemte integral, da der kompenseres for denne ved C i den fuldstændige løsning. Vi har altså nu:

$$y(x) = e^{2x^3} \int e^{-2x^3} \cdot 0\, dx + Ce^{2x^3} = e^{2x^3} \int 0\, dx + Ce^{2x^3},$$

Integralet af 0 er blot en konstant, vi kalder denne C_1:

$$y(x) = e^{2x^3}C_1 + Ce^{2x^3} = e^{2x^3}(C_1 + C) = e^{2x^3}C_2.$$

Her er $C_2 = C_1 + C$, eftersom når man lægger to konstanter sammen, så får man blot en ny konstant. Begyndelsesværdiproblemet giver os nu, at $y(0) = 3$, således at

$$y(0) = e^{2\cdot 0^3}C_2 = e^0C_2 = C_2 = 3.$$

Vi ser altså, at $C_2 = 3$, og dermed er

$$y(x) = 3e^{2x^3} \Rightarrow y(1) = 3e^{2\cdot 1^3} = 3e^2.$$

b. Hvad giver differentialkvotienten $y'(1)$?

Da

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2y, \quad y > 0,$$

og vi kender $y(1) = 3e^2$, får vi (husk: $\frac{dy}{dx} = y'(x)$):

$$y'(1) = 6 \cdot 1^2 \cdot y(1) = 6 \cdot (3e^2) = 18e^2.$$

c. Hvad giver differentialkvotienten $y'(0)$?

Samme princip som i opgave b, denne gang havde vi på forhånd fået opgivet $y(0) = 3$, og vi får:

$$y'(0) = 6 \cdot 0^2 \cdot y(0) = 0 \cdot 3 = 0.$$

Opgave 5

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x, \quad y(0) = 1.$$

Hvad er funktionsværdien $y(1)$?

Vi bruger samme princip som i opgave 4.a. Vi ser altså, at $p(x) = 2x$, og $q(x) = x$. Derudover får vi, at

$$P(x) = \int p(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2.$$

Dermed bliver den fuldstændige løsning

$$y(x) = e^{-x^2} \int e^{x^2} x\, dx + Ce^{-x^2}.$$

Vi udregner integralet ved substitution af variable. Lad $t = x^2$. Så er

$$\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow dt = 2x\, dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} dt.$$

Ved at erstatte dx med den fundne $\frac{1}{2x}dt$ og x^2 med t i integralet, får vi:

$$y(x) = e^{-x^2} \int e^t x \frac{1}{2x}\, dt + Ce^{-x^2} = e^{-x^2} \frac{1}{2} e^t\, dt + Ce^{-x^2} = e^{-x^2} \frac{1}{2} e^{x^2} + Ce^{-x^2}.$$

Da $a^k \cdot a^{-k} = a^{k-k} = a^0 = 1$, får vi:

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Vi finder nu C, da $y(0) = 1$ bliver:

$$y(0) = \frac{1}{2} + Ce^{-0^2} = \frac{1}{2} + Ce^0 = \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dermed er

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Hvis vi indsætter 1 på x's plads fås $y(1)$:

$$y(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-1^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-1}.$$

Hvad er differentialkvotienten $y'(1)$?

Da

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x - 2xy,$$

får vi

$$y'(1) = \frac{dy(1)}{dx} = 1 - 2 \cdot 1 \cdot y(1) = 1 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-1}\right) = 1 - (1 + e^{-1}) = -e^{-1}.$$

Opgave 6

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 6y' + 10y = 0.$$

Svar:

Vi løser den karakteristiske ligning,

$$r^2 + 6r + 10 = 0.$$

Diskriminanten D er

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 = (2i)^2.$$

Vi har omskrevet det til et imaginært tal opløftet i anden, da man tager kvadratroden af diskriminanten, når man finder rødderne. Vi får altså:

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{(2i)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i.$$

Vi har nu en sætning (regel), der siger, at hvis man får komplekse rødder $\alpha \pm \beta i$, så er den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

og da vi fandt rødderne $-3 \pm i$ er $\alpha = -3$ og $\beta = 1$. Svaret er dermed

$$y(x) = c_1 e^{-3t} \cos(t) + c_2 e^{-3t} \sin(t).$$

Opgave 7

Betragt den inhomogene differentialligning

$$y'' + 4y' + 6y = 3t - 4.$$

a. Hvad er et passende gæt for en partikulær løsning?

Da højresiden består af $3t - 4$, så vil et godt gæt være $At + B$, hvor A og B er konstanter.

b. Hvad skal konstanterne A og B være, for at man får en partikulær løsning?

Da vi har valgt gættet $y_p(t) = At + B$, finder vi nu den første og anden ordens afledede af denne og får:

$$y'_p(t) = A, \quad y'_p(t) = 0.$$

Disse kan vi nu indsætte på deres respektive pladser i differentialligningen, og vi får:

$$0 + 4A + 6(At + B) = 4A + 6At + 6B = 3t - 4.$$

Da vi på venstre side kun har leddet $6At$ som indeholder t og tilsvarende på højre side $3t$, så kan disse to sættes lig hinanden. Ydermere er $4A + 6B$ en konstant på venstre side (afhænger ikke af t), hvor -4 er den tilsvarende konstant på højre siden. Vi får altså to ligninger:

$$6At = 3t, \quad 4A + 6B = -4.$$

Isoleres A i den første fås:

$$6At = 3t \Leftrightarrow 6A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vi kan nu indsætte den fundne værdi for A i anden ligning, hvor vi dermed kan isolere B:

$$4\frac{1}{2} + 6B = 2 + 6B = -4 \Leftrightarrow 6B = -6 \Leftrightarrow B = -\frac{6}{6} = -1.$$

.Dermed er $A = \frac{1}{2}$ og $B = -1$.

Opgave 8

En funktion er givet ved
$$f(x, y) = e^{4y+2xy}.$$

Hvad giver den partielle afledede $f_x(x, y)$?

Vi bruger kædereglen til at differentiere:
$$(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Lad $g(h(x)) = e^{h(x)}$ og $h(x) = 4y + 2xy$. Vi differentierer nu g i forhold til $h(x)$ (principielt kunne vi sige, at vi differentierer e^z i forhold til z, funktionen forvirrer), hvilket selvfølgelig giver $e^{h(x)}$. - Ingen ændring der. Nu skal vi så differentiere vores $h(x)$ i forhold til x. Dette bliver
$$h'(x) = 2y,$$
og vi får altså slutteligt, at
$$f_x(x, y) = e^{h(x)} \cdot 2y = 2ye^{4y+2xy}.$$

Hvad giver den partielle afledede $f_y(x, y)$?

Samme princip som før, vi differentierer bare $h(y) = 4y+2xy$ i forhold til y i stedet, da $g(h(y))$ ikke ændrer sig i forhold til $g(h(x))$. Vi får
$$h'(y) = 4 + 2x$$
Dermed er
$$f_y(x, y) = (4 + 2x)e^{4y+2xy}.$$

Hvilket af punkterne er et kritisk punkt for funktionen f?

Normalt vil man nok sætte $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$ og så finde de par (x, y), som opfylder dette. Da vi har fået givet 6 punkter i opgaven, kan vi bruge udelukkelsesmetoden, hvis vi sætter $f_x(x, y) = f_y(x, y)$ (skal gælde under alle omstændigheder for kritiske punkter). Dette giver udtrykket
$$2ye^{4y+2xy} = (4 + 2x)e^{4y+2xy}.$$

Vi kan nu divdere med e^{4y+2xy} på begge sider, hvilket giver
$$2y = 4 + 2x.$$

Divideres med 2 på begge sider opnås
$$y = 2 + x.$$

Vi ser, at vores kritiske punkter I HVERT FALD skal opfylde kravet om $y = 2 + x$. Dvs. en forskel på 2 mellem x- og y-værdi. De givne punkter er
$$(0, 0), \quad (1, -2), \quad (2, 1), \quad (3, 0), \quad (-1, 3), \quad (-2, 0),$$
hvor $(-2, 0)$ er den eneste, der opfylder kravet $y = 2 + x$.

Opgave 9

En funktion er defineret som

$$f(x, y) = x\sin(y) + x^2.$$

Hvad giver gradientvektoren $\nabla f(P)$ i punktet $P = (1, 0)$?

Vi skal differentiere $f(x, y)$ med hensyn til både x og y. Husk, at y betragtes som en konstant, når man differentierer i forhold til x og omvendt. Der fås

$$f_x(x, y) = \sin(y) + 2x, \qquad f_y(x, y) = x\cos(y).$$

Dermed er

$$\nabla f(x, y) = (\sin(y) + 2x, x\cos(y)) \Rightarrow \nabla f(P) = (\sin(0) + 2 \cdot 1, 1\cos(0)) = (2, 1)\,,$$

hvilket svarer til $2i + j$.

Hvad giver den retningsafledede $D_u f(P)$ i punktet $P = (1, 0)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $u = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j$?

Vi ved, at

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u,$$

og da vi fra forrige opgave har $\nabla f(P) = (2, 1)$, og da $u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ bliver prikproduktet, $D_u f(P)$:

$$D_u f(P) = (2, 1) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 2\frac{4}{5} + 1\frac{3}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5}.$$

Find en ligning, der beskriver tangentplanen til grafen for f i punktet $Q = (1, 0, 1)$.

Tangentens ligning er

$$z = Q_z + f_x(Q)(x - Q_x) + f_y(y - Q_y),$$

og da vi kender alle værdierne, skal disse blot indsættes, og vi får:

$$z = 1 + 2(x - 1) + 1(y - 0) = 1 + 2x - 2 + y = -1 + 2x + y,$$

hvormed $z = -1 + 2x + y$ er facit. For at omskrive til passende facit i eksamenen, bør z trækkes fra på begge sider, og 1 skal lægges til. Vi får

$$2x + y - z = 1.$$

Opgave 10

Et område $\mathcal{R}$ i planen er beskrevet med de punkter (x, y), som opfylder uligheden

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y.$$

Find værdien af planintegralet

$$\int\int_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 - 1)\, dA$$

.

Svar:

Vi vil her omskrive det til et polært tilfælde, da vi indser, at der er mange elementer, der hedder noget med $x^2 + y^2$. Cirklens ligning for en cirkel i centrum $(0, 0)$ hedder $x^2 + y^2 = r^2$. Vi kan altså omskrive betingelsen $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ til

$$1 \leq r^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 2.$$

I ovenstående udnytter vi, at radius ikke kan være negativ (dvs. vi skal ikke huske $\pm$, når vi tager kvadratroden). Vi ved altså nu, at vi skal integrere over et areal mellem to cirkler med radius 1 og 4.

Vi har ydermere fået at vide, at $x, y \geq 0$, hvilket vil sige, at vores areal er i den første kvadrant. Dermed kan vi for θ, som er vinklen i forhold til x-aksen opstille kriteriet

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

da $\pi/2$ svarer til den positive y-akse.

Vi husker nu, at vi kan skifte mellem kartesiske og polære koordinater under integration ved

$$\iint f(x, y) dA = \iint f\left(r \cos\theta, r \sin\theta\right) \cdot r dr d\theta,$$

og vi får da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 1\right) \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left(r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta - 1\right) \cdot r dr d\theta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left(r^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - 1\right) \cdot r dr d\theta.$$

Vi husker nu idiotformlen ($\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) og får en række simple udregninger:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left(r^2 - 1\right) \cdot r dr d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3 + r \, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{2} r^2\right]_1^2 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{2} 2^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 + \frac{1}{4} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{4} \, d\theta \\
&= \left[\frac{9}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Opgave 11

To komplekse tal er givet ved

$$z_1 = \frac{2+i}{3-i} + \frac{3+i}{2}, \quad z_2 = \left(e^{1+\frac{\pi}{3}i}\right)^6$$

Hvad giver z_1 på standardform?

z_1 kræver, at vi forlænger brøken med den kompleks-konjugerede til det komplekse tal i nævneren (dvs. hvis nævneren er $a+bi$, så er den kompleks konjugerede $a-bi$)! Vi får altså:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{2+i}{3-i} + \frac{3+i}{2} \\
&= \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} + \frac{3+i}{2} \\
&= \frac{6-1+2i+3i}{9^2+1^2} + \frac{3+i}{2} \\
&= \frac{5+5i}{10} + \frac{3+i}{2} \\
&= \frac{5}{5}\left(\frac{1+i}{2}\right) + \frac{3+i}{2} \\
&= \frac{1+i}{2} + \frac{3+i}{2} \\
&= \frac{4+2i}{2} \\
&= 2+i
\end{aligned}$$

Hvad giver z_2 på standardform?

Vi skal bruge, at

$$r \cdot e^{i\theta} = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$

og så skal vi lige huske regnereglerne for potenser, nemlig

$$\left(x^a\right)^b = x^{a\cdot b},$$

og at

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}.$$

Vi får altså:

$$z_2 = \left(e^{1+\frac{\pi}{3}i}\right)^6 = e^{6\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)} = e^{6+\frac{6\pi}{3}i} = e^{6+2\pi i} = e^6 e^{2\pi i} = e^6\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right) = e^6.$$

Da $\cos(2\pi) = \cos(0) = 1$, og $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$.

Opgave 12

Lad $\mathcal{T}$ være området i rummet bestående af punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$-2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 - x^2, \quad -y \leq z \leq y.$$

Et legeme med massetætheden $\delta(x, y, z) = 3 - y$ dækker netop området $\mathcal{T}$. Legemets rumfang (volumen) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Marker de rigtige integraler.

Første integral

$$m = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^2} \int_{-y}^{y} (3 - y)\, dz\, dy\, dx$$

Grænserne passer, og vi får en konstant ud i sidste ende, da integralordenen er korrekt.

Andet integral

$$m = \int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} \int_{-y}^{y} (3 - y)\, dz\, dx\, dy$$

Der er her byttet om på x og y i integralordenen i forhold til før. Da $0 \leq y \leq 4$, grundet $x = 0$ maksimerer $4 - x^2$, og da $y \leq 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y \leq 4 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 - y \Leftrightarrow |x| \leq \pm\sqrt{4 - y} \Leftrightarrow -\sqrt{4 - y} \leq x \leq \sqrt{4 - y}$, så stemmer integralordenen over ens med grænserne.

Tredje integral

$$m = \int_{0}^{4-x^2} \int_{-2}^{2} \int_{-y}^{y} (3 - y)\, dz\, dx\, dy$$

Integrationsordenen er forkert, da vi ikke får et lukket område.

Fjerde integral

$$V = \int_{0}^{4-x^2} \int_{-2}^{2} \int_{-y}^{y} dz\, dx\, dy$$

Ganske rigtigt er densiteten ikke medtaget, da vi snakker volumen, men integrationsordenen er lige som før, forkert.

Femte integral

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^2} \int_{-y}^{y} dz\, dy\, dx$$

Korrekt, da densiteten ikke er medtaget, samt at grænserne er lige som i første integral.

Opgave 13

a. Der gælder, at

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

Da $y = \arctan(x)$ har range/værdimængden

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

så kan vi altså ikke - uanset hvilke værdier af x, vi smider i den - opnå tallet $\frac{5\pi}{4}$, da dette tal ikke ligger i værdimængden!

b. Lad D være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne $0 \leq x \leq 1$ og $0 < y \leq 1$. Lad f være funktionen med forskriften

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{1}{y}$$

og definitionsmængde D. Da antager f et globalt maksimum.

Da vi kan lade y komme vilkårligt tæt på 0, så vil vi kunne gøre brøken $1/y$ vilkårligt stor! Dvs. vi kan altid finde en større værdi for $f(x, y)$ ved at vælge et y endnu tættere på 0 end det tidligere y var.

c. Definitionsmængden for funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ er $\mathbb{R}^2$ svarende til hele xy-planen.

Kan vi finde nogle værdier i $\mathbb{R}$, sådan at funktionen ikke giver mening? Nej, alle negative værdier for x og y bliver positive, når vi opløfter dem i anden. "Men hvad med 0, virker den også der."Ja selvfølgelig lille fjollehoved! Eftersom $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, så er

$$\sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0.$$

Altså er definitionsmængden hele xy-planen!

d. For funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, eksisterer den partielle afledede $f_x(x, y)$ ikke i punktet $(x, y) = (0, 0)$.

Okay lad os differentiere $f_x(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_x(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Hvis vi indsætter $(0, 0)$ i f_x, så bliver nævneren 0, og det må vi altså ikke!

e. Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 1)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$

Relationen mellem rektangulære og polære koordinater er givet ved

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Vi indsætter altså blot vores radius, r, og vinkel, θ, i ovenstående og får

$$x = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

og for y

$$y = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

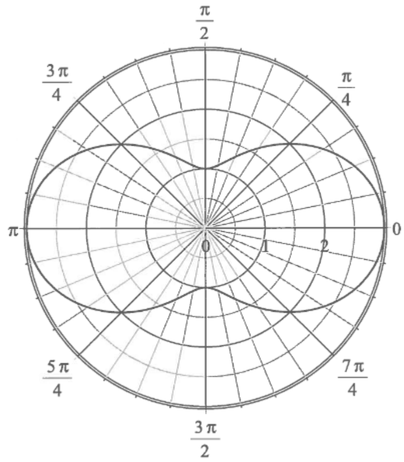
hvormed de to punkter altså er tilsvarende.

Opgave 14

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen

$$r = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f svarer til figuren?

$$f(\theta) = 2 - \cos(3\theta), \quad f(\theta) = 2 + \cos(\theta), \quad f(\theta) = 1 + \sin(3\theta)$$

$$f(\theta) = 2 + \cos(2\theta), \quad f(\theta) = 2 + \sin(2\theta), \quad f(\theta) = 1 + \sin(\theta)$$

Svar:

Vi vil bruge udelukkelsesmetoden. Vi aflæser på figuren, at $\theta = 0$ skal give en radius på 3. Vi indsætter

$$f(0) = 2 - \cos(0) = 2 - 1 = 1, \quad f(0) = 2 + \cos(0) = 2 + 1 = 3, \quad f(0) = 1 + \sin(3 \cdot 0) = 1$$

$$f(0) = 2 + \cos(2 \cdot 0) = 2 + 1 = 3, \quad f(0) = 2 + \sin(2 \cdot 0) = 2, \quad f(0) = 1 + \sin(0) = 1.$$

Der er altså kun 2 funktioner, der opfylder dete, nemlig $f(\theta) = 2 + \cos(\theta)$ og $f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$. Vi aflæser nu figuren og ser, at $\theta = \pi$ også giver en radius på 3. Vi behøver blot at tjekke de to førnævnte funktioner, om de passer, og får ved indsættelse:

$$f(\pi) = 2 + \cos(\pi) = 2 - 1 = 1, \quad f(\pi) = 2 + \cos(2\pi) = 2 + 1 = 3.$$

Altså er $f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$ den funktion, vi leder efter.