Besvarelser til Calculus og Lineær Algebra Globale Forretningssystemer Eksamen - 3. Juni 2014

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Jeg har skrevet 'for meget' tekst for at forklare.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

a. Differentier funktionen $f(x) = \frac{6}{x} + \ln \frac{x}{3}$.

Okay, så vi ved, at $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Altså er

$$\left(\frac{6}{x}\right)' = -\frac{6}{x^2}.$$

Vi husker nu logaritme-regnereglen

$$\ln \frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b),$$

hvorfor vi får

$$ln \frac{x}{3} = \ln(x) - \ln(3).$$

Her er $\ln 3$ jo bare en konstant, så når vi differentierer denne, forsvinder den. Og vi kan slå op i et hæfte, at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Altså fås:

$$\left(\ln \frac{x}{3}\right)' = (\ln(x) - \ln(3))' = \frac{1}{x}.$$

Sætter vi de to afledede funktioner sammen får vi, at:

$$f'(x) = -\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} = -\frac{6}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{x-6}{x^2}.$$

Jeg lavede blot en omskrivning ved at forlænge brøken $1/x$ med x, så vi kunne få udtrykkene på fælles brøkstreg (nævnerne skal være ens).

b. Bestem ligningen for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet $(x_0, y_0) = (3, 2)$.

Tangentens ligning er generelt givet ved

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Vi mangler blot at udregne $f'(x_0)$:

$$f'(3) = \frac{3-6}{3^2} = \frac{-3}{3^2} = -\frac{1}{3}.$$

Vi indsætter nu i tangentens ligning:

$$y = -\frac{1}{3}(x-3) + 2 = -\frac{1}{3}x + 1 + 2 = -\frac{1}{3}x + 3.$$

c. Funktionen g er givet ved $g(x) = \ln \frac{1}{\cos x}$. Vis, at $g'(x) = \tan(x)$.

Lad os først huske på den logaritmiske regneregle $\ln \frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$. Vi får altså, at

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \ln(1) - \ln(\cos(x)) = -\ln(\cos(x)),$$

hvor vi anvender, at $\ln(1) = 0$. Vi skal altså nu bruge kædereglen. Den ydre funktion er $h(z) = -\ln(z)$ og den indre $z = \cos(x)$. Hvis vi differentierer $h(z)$ i forhold til z og z i forhold til x opnås:

$$h'(z) = -\frac{1}{z}, \qquad z'(x) = -\sin(x).$$

Med kædereglen får vi, at

$$g'(x) = h'(z(x)) \cdot z'(x) = -\frac{1}{z(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x)) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

d. Et område er afgrænset af linjerne $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ og $y = 0$ samt grafen for funktionen $h(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. Bestem dets areal. (Man kan benytte at $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Arealet er givet ved

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)\,dx.$$

Vi kan lave en omskrivning af $h(x)$:

$$h(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Vi ved fra opgave c, at hvis vi differentierede $\ln\frac{1}{\cos x}$, fik vi $\tan x$. Så hvis vi integrerer $\tan x$, opnår vi $\ln\frac{1}{\cos x}$. Husk endvidere, at vi kan omskrive $\ln\frac{1}{\cos x} = -\ln(\cos(x))$. Altså opnås:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \\
&= [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - (-\ln(\cos(0)))) \\
&= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) \\
&= -\ln(\sqrt{2}) - (-\ln(2)) + 0 \\
&= -\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) + \ln(2) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2) + \ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

Bemærk, at jeg har brugt følgende regneregler:

$$\ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b), \qquad \ln(a^b) = b\ln(a), \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad \ln(1) = 0.$$

Problem 2

Her betegner $Q = (3, -2, 1)$ og $R = (0, -5, 1)$ to punkter i rummet, med origo O.

a. Bestem krydsproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, idet $\mathbf{u} = \overline{OQ}$ og $\mathbf{v} = \overline{OR}$. Vis parallellogrammet udspændt af vektorerne u og v har areal $9\sqrt{3}$.

Vi udregner **u** og **v** (det er mere en formalitet end en egentlig udregning):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi udregner nu **n**:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}(-2 \cdot 1 - 1 \cdot (-5)) - \mathbf{j}(3 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + \mathbf{k}(3 \cdot (-5) - (-2) \cdot 0) \\
&= \mathbf{i}(-2 + 5) - \mathbf{j}(3 - 0) + \mathbf{k}(-15 + 0) \\
&= 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 15\mathbf{k} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Længden af **n** svarer til arealet af det udspændte parallellogram. For nemheds skyld omskriver jeg $9\sqrt{3}$:

$$9\sqrt{3} = \sqrt{9^2}\sqrt{3} = \sqrt{81}\sqrt{3} = \sqrt{81 \cdot 3} = \sqrt{243}.$$

Vi udregner nu længden **n** (arealet af det udspændte parallellogram):

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-15)^2} = \sqrt{9 + 9 + 225} = \sqrt{243}.$$

Vi ved, at $9\sqrt{3} = \sqrt{243}$ forrige udregning, hvorfor længden af **n** stemmer over ens med arealet opgivet i opgaven.

b. Bestem en ligning for planen P, der indeholder punkterne O, Q og R.

Vi skal blot bruge et punkt (x_0, y_0, z_0), som ligger i planen, samt en normalvektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, som står vinkelret på planen. Planens ligning er da givet ved

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Vi ved, at **u** og **v** ligger i planen, da disse vektorer er frembragt af punkter i planen, O, Q og R. Vi ved endvidere, at krydsproduktet **n** står vinkelret på de to vektorer

u og **v**, hvorfor **n** også må stå vinkelret på P. Dermed er **n** altså en normalvektor til P. Hvis vi samtidig vælger $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) = O$ bliver planens ligning altså:

$$3(x-0) - 3(y-0) - 15(z-0) = 3x - 3y - 15z = 0 \Leftrightarrow x - y - 5z = 0 \Leftrightarrow x = 5z + y$$

Altså kan planens ligning skrives

$$x = y + 5z.$$

Bemærk, at dette blot er en af mange omskrivninger.

c. En ret linje L har de symmetriske ligninger

$$-\frac{x-3}{3} = \frac{y+6}{2} = -\frac{z-2}{1}.$$

Find en retningsvektor r for L.

En omskrivning af de symmetriske ligninger, hvor minus foran brøkerne ganges ned i nævneren, giver:

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Det er nu muligt at aflæse retningsvektoren direkte af nævnerne. Vi finder

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

d. Afgør, hvordan L ligger i forhold til P.

Vi kender retningsvektoren, endvidere kan 'startpunktet' aflæses til $(3, -6, 2)$. Det betyder, at vi også kan skrive linjen som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dette betyder altså kort sagt, at vi kan udtrykke x, y og z som:

$$x = 3 - 3t, \quad y = -6 + 2t \quad z = 2 - t$$

Vi kan nu indsætte disse udtryk på x, y og z's plads i planens, P's, ligning,

$$x = y + 5z$$

og får:

$$3 - 3t = (-6 + 2t) + 5(2 - t).$$

Vi kan reducere højresiden:

$$3 - 3t = -6 + 2t + 10 - 5t = -3t + 4.$$

Lægger vi $3t$ til på begge sider fås:

$$3 - 3t = -3t + 4 \Leftrightarrow 3 = 4$$

Altså deler linjen og planen de punkter for de værdier af t, så $3 = 4$. Men 3 er aldrig lig med 4 uanset værdien af t. Det betyder, at linjen og planen ikke deler punkter. Det betyder altså, at planen og linjen skal være parallelle - uden sammenfald.

Problem 3

a. Her betragtes det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -2 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Opskriv ligningssystemet som en matrixligning på formen $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. Angiv dernæst totalmatricen, og bestem dennes reducerede echelonform.

Vi opskriver matrixligningen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Totalmatricen er derfor

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & -2 \\ -3 & -7 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Denne rækkereduceres for at opnå den reducerede echelonform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & -2 \\ -3 & -7 & 9 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \to r_2 \\ r_3 + 3r_1 \to r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 3r_2 \to r_1 \\ r_3 - 2r_2 \to r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Bestem ligningssystemets løsningsmængde.

Vi aflæser af den reducerede echelonform:

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_3 = 6 \\ &x_2 - 3x_3 = -2 \\ &x_3 \text{ er en fri variabel.} \end{aligned}$$

Vi kan omskrive disse til

$$\begin{aligned} &x_1 = 6 - 4x_3 \\ &x_2 = -2 + 3x_3 \\ &x_3 \text{ er en fri variabel.} \end{aligned}$$

Vi kan altså opskrive løsningsmængden således:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c. Opskriv løsningsmængden for det tilhørende homogene ligningssystem. Vis dernæst, at A's 3. søjle, $\mathbf{a}_3$, er en linearkombination af de to første søjler $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

Løsningsmængden for det homogene ligningssystem er tilsvarende det for det inhomogene ligningssystem blot uden den konstante løsningsvektor. Det vil sige:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I forhold til linearkombinationen betragt den reducerede echelonform uden sidste søjle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan direkte aflæse linearkombinationen for $\mathbf{a}_3$ i tredje søjle af denne matrix, da der skal 4 af $\mathbf{a}_1$ (aflæses af første række) og -3 af $\mathbf{a}_2$ (aflæses af anden række) til:

$$\mathbf{a}_3 = 4\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2.$$

Vi kan eventuelt tjekke efter:

$$4\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -12 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_3.$$

Det passer fint.

d. Afgør om A kommuterer med matricen $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Vi skal blot tjekke, om $AB = BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 0 - 5\cdot(-2) & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 1 + 3\cdot(-3) & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Hvis jeg har regnet rigtigt, kan vi se, at den første indgang i matricerne ikke er ens. Derfor kommuterer de ikke.

Problem 4

a. Bestem definitionsmængden D for funktionen $f(x, y) = \sqrt{6 - x - 2y}$ præcist ved hjælp af en ulighed, og lav en skitse af D.

Vi ved, at vi ikke må tage kvadratroden af noget negativt. Det betyder, at indholdet af kvadratroden, $6-x-2y$, skal være større end eller lig med 0. Vi kan skrive følgende:

$$6 - x - 2y \geq 0 \Leftrightarrow 6 - x \geq 2y \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 3 \geq y.$$

Der er selvfølgelig andre måder at skrive uligheden i definitionsmængden på, f.eks. $y \leq -\frac{1}{2}x + 3$. Definitionsmængden kan da (blandt andet) skrives som en af følgende:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 - x - 2y \geq 0\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 \geq x + 2y\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 - x \geq 2y\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2}x + 3 \geq y\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -\frac{1}{2}x + 3\}.$$

Der er mange andre (uendeligt mange) måder at skrive definitionsmængden på, men dette er da et udkast. Vi kan da bruge sidste ulighed

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 3,$$

til at tegne en skitse af definitionsmængden. Dette er en linje, der skærer y-aksen i 3, hvorefter den falder med 1/2 hver gang x stiger med 1. Da det er '$y \leq$', som optræder i uligheden, skal y altså være mindre eller lig linjen. Så vi bør skravere alt under linjen. - Jeg gider ikke gøre det, fordi jeg er doven. Det er jo blot en skitse alligevel.

b. Udregn de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Vi skal bruge kædereglen, hvor $f(x) = h(g(x))$:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Lad $g(x, y) = 6 - x - 2y$ være den indre funktion og $h(g) = \sqrt{g}$ være den ydre funktion. Den afledede af den ydre funktion ændrer sig ikke, om det er den ene partielle afledede eller den anden, vi betragter. Vi differentierer den

$$h'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}}.$$

Hvis vi erstatter g med $6 - x - 2y$ bliver denne altså:

$$h'(g(x, y)) = \frac{1}{2\sqrt{6 - x - 2y}}.$$

Differentierer vi nu $g(x,y)$ i forhold til henholdsvis x og y fås:

$$\frac{\partial g}{x} = g_x(x,y) = -1,$$
$$\frac{\partial g}{y} = g_y(x,y) = -2.$$

Vi kan nu udregne de partielle afledede af f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h'(g(x,y)) \cdot g_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{6-x-2y}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x-2y}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = h'(g(x,y)) \cdot g_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{6-x-2y}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{6-x-2y}}.$$

c. Bestem en ligning for de (x,y,z), der ligger på tangentplanen for f's graf i punktet $(x_0,y_0,z_0) = (-3,1,f(-3,1))$.

Den generelle ligning for tangentplanens ligning er givet ved

$$z = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0) + f(x_0,y_0),$$

hvor $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ og $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. Vi mangler altså blot at indsætte punktet $(-3,1)$ i funktionerne $f(x,y)$, $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$. Vi får:

$$f(-3,1) = \sqrt{6-(-3)-2\cdot 1} = \sqrt{6+3-2} = \sqrt{7}$$
$$f_x(-3,1) = -\frac{1}{2\sqrt{6-(-3)-2\cdot 1}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$$
$$f_y(-3,1) = -\frac{1}{\sqrt{6-(-3)-2\cdot 1}} = -\frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Bemærk, at jeg forlænger brøkerne $\frac{1}{\sqrt{7}}$ med $\sqrt{7}$. Det vil sige, jeg ganger både tæller og nævner med $\sqrt{7}$. Nævneren kommer så til at hedde $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$, men det er $\sqrt{7}^2$. Så potensen og kvadratroden går ud med hinanden og efterlader blot 7. Vi kan nu indsætte værdier i tangentplanens ligning:

$$z = f_x(-3,1)(x-(-3)) + f_y(-3,1) + f(-3,1) = -\frac{\sqrt{7}}{14}(x+3) - \frac{\sqrt{7}}{7}(y-1) + \sqrt{7}.$$

Altså er

$$z = -\frac{\sqrt{7}}{14}(x+3) - \frac{\sqrt{7}}{7}(y-1) + \sqrt{7}.$$

Lad os prøve at gange igennem med 14 på begge sider:

$$14z = -\sqrt{7}(x+3) - 2\sqrt{7}(y-1) + 14\sqrt{7}.$$

Der er $\sqrt{7}$ i alle led på højre side, så vi kan trække denne ud foran en parentes:

$$14z = \sqrt{7}(-(x+3)-2(y-1)+14) = \sqrt{7}(-x-3-2y+2+14) = \sqrt{7}(-x-2y+13).$$

Så en anden måde at skrive tangentplanen på er

$$14z = \sqrt{7}(-x-2y+13).$$

Vi kunne eventuelt gange med $\frac{\sqrt{7}}{7}$ på begge sider. Det giver så

$$2\sqrt{7}z = -x - 2y + 13.$$

Der er som sådan ikke en specifik måde at angive tangentplanens ligning på, så vælg det udtryk, der giver mening for dig.

d. Godtgør, at punktet $(x, y, z) = (-1, 0, \sqrt{7})$ ligger på tangentplanen fra spørgsmål c.

Jeg bruger den sidste ligning, jeg fandt frem til,

$$2\sqrt{7}z = -x - 2y + 13.$$

Indsætter vi $z = \sqrt{7}$ på venstre side fås

$$2\sqrt{7}\sqrt{7} = 2\sqrt{7}^2 = 2 \cdot 7 = 14.$$

Indsættes $x = -1$ og $y = 0$ på højresiden fås:

$$-(-1) - 2 \cdot 0 + 13 = 1 - 0 + 13 = 14.$$

Altså er højresiden lig med venstresiden, hvorfor punktet altså må ligge på tangentplanen.

Problem 5

Find maksimumsværdien $\max_V f(x_1, x_2)$ og også det punkt (x_0^*, y_0^*), hvor $f(x_1, x_2)$ antager sin maksimale værdi, idet

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$$

og idet V er området, hvori (x_1, x_2) opfylder ulighederne

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 13 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

foruden at $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.

Svar:

Jeg er doven i dag, så jeg bruger kun Simplex-metoden, da den er nemmest/hurtigst at skrive forklaring til.

Vi skriver først ulighederne som ligheder ved brug af slack-variablene, S_1, S_2, S_3 og S_4:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + S_1 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + S_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + S_3 &= 13 \\ x_1 - 2x_2 + S_4 &= 4. \end{aligned}$$

Sæt nu funktionen til at have værdien M:

$$M = 3x_1 + x_2 \Leftrightarrow M - 3x_1 - x_2 = 0.$$

Vi kan nu opstille matricen:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi skal nu vælge den indgang i matricen, vi vil pivotere omkring. Vi ser, at det mindste tal i den nederste række er -3, som er i første søjle. Altså skal vi pivotere omkring en af indgangene i første søjle. Vi skal nu udvælge de indgange, som er positive. Det vil sige tredje og fjerde række, da disse værdier er 2 og 1 respektivt. Vi skal nu finde det mindste forhold mellem disse tal og det tilhørende tal i den sidste søjle. Vi ser, at $13/2 = 6.5$ og $4/1 = 4$. Vi vælger altså søjle 1 og række 4 som vores pivoteringsindgang, da denne giver det mindste forhold. Dermed laver vi rækkereduktioner:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_5+3r_4 \to r_5]{\substack{r_1+3r_4\to r_1 \\ r_2+r_4\to r_2 \\ r_3-2r_4\to r_3}} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Vi skal vælge det mindste af de negative tal. Dette er -7, hvorfor vi vælger en indgang i søjle 2. Vi behøver ikke tjekke efter ratioer denne gang, da der kun findes et tal større end nul i denne søjle, nemlig 5 i tredje række. Det betyder, at vi pivoterer omkring denne indgang. For at undgå brøker i første omgang ganger jeg lige række 2, 4 og 5 med 5:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[5r_5 \to r_5]{\substack{5r_2\to r_2 \\ 5r_4\to r_4}} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 30 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 20 \\ 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & 15 & 5 & 60 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu pivotere omkring række 3 søjle 2:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 30 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 20 \\ 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & 15 & 5 & 60 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_5+7r_3 \to r_5]{\substack{r_1+r_3\to r_1 \\ r_2+r_3\to r_2 \\ r_4+2r_3\to r_4}} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & M & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 3 & 0 & 35 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & 95 \end{bmatrix}.$$

Vi er principielt i mål nu. Det vi kan læse af række 4's første og sidste søjle er, at $5x_1 = 30$. Vi får altså at

$$5x_1 = 30 \Leftrightarrow x_1 = \frac{30}{5} = 6.$$

Det vi kan læse af række 3's anden og sidste søjle er, at $5x_2 = 5$. Vi får altså, at

$$5x_2 = 35 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{5} = 1.$$

Altså er det optimale punkt $(x_1^*, x_2^*) = (6, 1)$, hvilken vi kan indsætte i vores funktion:

$$f(6, 1) = 3 \cdot 6 + 7 = 18 + 1 = 19.$$

Dette er heldigvis det samme svar, som hvis vi aflæser de to sidste søjler i den sidste række, $5M = 95$:

$$5M = 95 \Leftrightarrow M = \frac{95}{5} = 19.$$

Altså er den maksimale værdi 19.