Besvarelser til Calculus og Lineær Algebra Globale Forretningssystemer Eksamen - 8. Juni 2015

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Jeg har skrevet 'for meget' tekst for at forklare.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

a. Differentier funktionen $f(x) = 5\frac{x-2}{x} + \ln\frac{x}{7}$.

I stedet for bare at differentiere med det samme med kvotientregel og kæderegel, så lad os lave en omskrivning i stedet. Hvis vi har en brøk, $\frac{a-b}{c}$ kan denne skrives $\frac{a}{c} - \frac{b}{c}$. Det vil sige, at vi kan skrive

$$5\frac{x-2}{x} = \frac{5x-10}{x} = \frac{5x}{x} - \frac{10}{x} = 5 - 10\frac{1}{x}.$$

Da 5-tallet står for sig selv (uden at være ganget på en funktion med x), er dette en konstant. Altså forsvinder 5-tallet, når vi differentierer. Derudover er -10 en konstant, der er ganget på $\frac{1}{x}$. Altså forsvinder -10 IKKE, men derimod skal denne blot ganges på den afledede for $1/x$. Vi ved, at (eventuelt ved at slå op i et hæfte)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Derfor er

$$\left(-10\frac{1}{x}\right)' = -10\left(\frac{1}{x}\right)' = 10\frac{1}{x^2} = \frac{10}{x^2}.$$

Altså

$$\left(5\frac{x-2}{x}\right)' = \frac{10}{x^2}$$

Lad os nu kigge på logaritme-omskrivningsregler:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b).$$

Vi vil gerne bruge sidstnævnte, da vi så kan lave omskrivningen

$$\ln\frac{x}{7} = \ln(x) - ln(7).$$

Her er $\ln(7)$ bare en konstant. Derfor forsvinder dette led ved differentiation. Vi ved desuden, at

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Derfor er

$$\left(\ln\frac{x}{7}\right)' = \frac{1}{x}.$$

Dette giver

$$f'(x) = \frac{10}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{10}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{10+x}{x^2}.$$

Bemærk, at vi har forlænget brøken $1/x$ med x (det vil sige ganger med x i både tæller og nævner) for at få brøkerne på samme brøkstreg.

b. Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet $(x_0, y_0) = (2, \ln \frac{2}{7})$.

Tangentens ligning er givet ved

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Vi mangler altså blot at udregne $f'(x_0)$. Vi bruger $f'(x)$ som fundet i forrige opgave:

$$f'(2) = \frac{10+2}{2^2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Dermed bliver tangentens ligning:

$$y = 3(x-2) + \ln \frac{2}{7} = 3x - 6 + \ln(2) - \ln(7).$$

Hvis man har lyst kan man lave den sidste omskrivning, men det er der reelt set ingen grund til.

c. Eftervis, at der for $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x)$ gælder, at $g'(x) = \ln(1+x)$.

Vi skal bruge produktreglen,

$$(p(x) \cdot q(x))' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x),$$

og kædereglen,

$$(h(p(x)))' = h'(p(x)) \cdot p'(x).$$

Lad os sætte $p(x) = 1 + x$. Dermed er

$$p'(x) = 1.$$

Hvis vi sætter $q(x) = \ln(1+x)$ skal vi bruge kædereglen til at differentiere denne. Så vi lader $h(x) = \ln(x)$ være den ydre funktion. Denne differentieret giver

$$h(x) = \ln(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x}.$$

Den indre funktion er som tidligere angivet, $p(x) = 1 + x$, hvorfor

$$h'(p(x)) = \frac{1}{1+x}.$$

Vi har allerede fundet $p'(x)$, hvorfor vi kan finde $q'(x)$ med kædereglen:

$$q'(x) = (h(p(x)))' = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1}{1+x}.$$

Vi kan nu bruge produktreglen, da vi kender både $p(x)$ og $q(x)$:

$$g'(x) = 1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} - 1 = \ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} - 1 = \ln(1+x) + 1 - 1 = \ln(1+x).$$

d. Bestem arealet A af det område, der er afgrænset af linjerne $x = 1$, $x = 3$ og $y = 0$ samt af grafen for funktionen $h(x) = \ln(\sqrt{1+x})$.

Jeg vil først bemærke følgende to regneregler:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad \ln(a^b) = b\ln(a).$$

Vi kan bruge disse to regneregler til at omskrive $h(x)$. Vi får:

$$h(x) = \ln(\sqrt{1+x}) = \ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

Vi kan nu opstille integralet til at finde arealet A:

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^3 h(x)\,dx \\
&= \int_1^3 \frac{1}{2}\ln(1+x) \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 \ln(1+x).
\end{aligned}$$

Men i forrige opgave fandt vi ud af, at $((1+x)\ln(1+x) - (1+x))' = \ln(1+x)$. Det betyder omvendt, at $\int \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - (1+x)$. Hvorfor vi får:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_1^3 \ln(1+x) \\
&= \frac{1}{2}\left[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(((1+3)\ln(1+3) - (1+3)) - ((1+1)\ln(1+1) - (1+1))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((4\ln(4) - 4) - (2\ln(2) - 2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4\ln(4) - 4 - 2\ln(2) + 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4\ln(2^2) - 2\ln(2) - 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4\cdot 2\ln(2) - 2\ln(2) - 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(8\ln(2) - 2\ln(2) - 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(6\ln(2) - 2\right) \\
&= \frac{6}{2}\ln(2) - \frac{2}{2} \\
&= 3\ln(2) - 1.
\end{aligned}$$

Bemærk, at $8\ln(2) - 2\ln(2) = 6\ln(2)$.[1]

[1] Det svarer lidt til, at du har 8 bananer og så fjerner du 2 bananer. Så har du kun 6 bananer tilbage. Samme princip med $\ln 2$ i stedet for bananer. Samme eksempel gælder også for matches på Tinder.

Problem 2

Her betegner $Q = (3, 4, 1)$ og $R = (-2, 0, 1)$ to punkter i rummet, med Origo $O = (0, 0, 0)$.

a. Udregn krydsproduktet $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, idet $\mathbf{u} = \overline{OQ}$ og $\mathbf{v} = \overline{OR}$. Vis, at arealet af parallellogrammet udspændt af vektorerne u og v er lig med $\sqrt{105}$.

Vi udregner **u** og **v** (det er mere en formalitet end en egentlig udregning):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi udregner nu **n**:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(4 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - \mathbf{j}(3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) + \mathbf{k}(3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) \\ &= \mathbf{i}(4 - 0) - \mathbf{j}(3 + 2) + \mathbf{k}(0 + 8) \\ &= 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Længden af **n** svarer til arealet af det udspændte parallellogram. Vi udregner:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 25 + 64} = \sqrt{105}.$$

Perfekt, lortet passer, ses i næste opgave.

b. Bestem en ligning for planet P, der indeholder punkterne O, Q og R.

Generelt gælder for et plan indeholdt punktet (x_0, y_0, z_0) og med normalvektoren $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, at planets ligning er givet ved

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Vi benytter punktet $O = (0, 0, 0)$ og normalvektoren fra forrige opgave:

$$4(x - 0) - 5(y - 0) + 8(z - 0) = 0,$$

hvilket altså kan reduceres til

$$4x - 5y + 8z = 0.$$

c. Et andet plan P_1 er givet ved ligningen

$$x - 2y + 3z = 1.$$

Angiv en normalvektor $\mathbf{n}_1$ for P_1 og udregn $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1$. Begrund dernæst at P og P_1 hverken er parallelle eller sammenfaldende.

Vi kan aflæse normalvektoren af ligningen til

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi finder nu $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}(-5 \cdot 3 - 8 \cdot (-2)) - \mathbf{j}(4 \cdot 3 - 8 \cdot 1) + \mathbf{k}(4 \cdot (-2) - (-5) \cdot 1) \\
&= \mathbf{i}(-15 + 16) - \mathbf{j}(12 - 8) + \mathbf{k}(-8 + 5) \\
&= 1\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Hvis planerne skal være sammenfaldende eller parallelle vil normalvektorerne være parallelle. Hvis normalvektorerne til planerne er parallelle, så vil de ikke udspænde et parallellogram, og derfor vil det 'udspændte parallellogram' have areal 0. Men da længden

$$\|\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} > 0,$$

udspænder de to normalvektorer altså et parallellogram.

d. Forklar hvorfor skæringslinjen L til planerne P og P_1 har de symmetriske ligninger

$$\frac{x+2}{1} = -\frac{y}{4} = -\frac{z-1}{3}.$$

Vektorproduktet $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1$ svarer faktisk til retningsvektoren for skæringslinjen. Dette ses også ved omskrivningen

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-3}.$$

Vi kan altså aflæse, at retningsvektorens koordinater stemmer over ens med nævneren af de tre brøker. Vi aflæser, at linjen angiveligt går igennem punktet $(-2, 0, 1)$. Planerne skal altså begge have dette punkt i sig for, at det er et skæringspunkt. Vi indsætter altså punktkoordinaterne i ligningerne for de to planer,

$$\begin{aligned}
4x - 5y + 8z &= 0 \\
x - 2y + 3z &= 1,
\end{aligned}$$

og ser, om punktet opfylder lighederne:

$$4 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = -8 - 0 + 8 = 0 \checkmark$$
$$-2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = -2 - 0 + 3 = 1 \checkmark$$

Punktet ligger altså i begge planer, hvorfor det er et skæringspunkt, hvilket betyder, det må ligge på skæringslinjen.

Problem 3

a. Her betragtes det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Angiv ligningssystemet som en matrixligning på formen $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. Bestem dernæst totalmatricens reducerede echelonform.

Matrix-ligningen bliver (ved at aflæse koefficienterne):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Totalmatricen opskrives da og reduceres

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1\to r_3]{r_2-3r_1\to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 14 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r3-r_2\to r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2\to r_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2\to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Opskriv ligningssystemets løsningsmængde.

Vi skriver totalmatricens reducerede echelonform som ligningssystemer:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 3 \\ x_2 &= 7 \\ x_3 \text{ er en fri variabel.} \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

da $x_1 = 3 + x_3$.

c. Angiv løsningsmængden for det tilhørende homogene ligningssystem. Skriv dernæst A's 3. søjle, a_3, som en linearkombination af de to første søjler a_1 og a_2.

Løsningsmængden for det homogene ligningssystem er givet som løsningsmængden fra det heterogene system blot hvor sidste søjle er 0. Det vil sige:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

da

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 \text{ er en fri variabel.} \end{aligned}$$

Fjernes højresiden af lig med i ovenstående fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan da aflæse koefficienterne til linearkombinationen for $\mathbf{a}_3$ til $-1\mathbf{a}_1$ og $0\mathbf{a}_2$.[2] Altså er

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1.$$

d. Afgør om A kommuterer med matricen $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Vi ganger

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+6+2 & 0+2+2 & 4-6-2 \\ -12+6+6 & 0+2+6 & 12-6-6 \\ -8+0+4 & 0+0+4 & 8+0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$BA = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+0+8 & 4+0+0 & 4+0-8 \\ -6-6+12 & 6+2+0 & 6+6-12 \\ -2-6+4 & 2+2+0 & 2+6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Så hvis jeg har regnet rigtigt, kommuterer A med B, da $AB = BA$.

[2] Det er tallene, der står i tredje søjle i den respektive række.

Problem 4

a. Bestem definitionsmængden D for funktionen $f(x,y) = \sqrt{2x - 6y^2}$ præcist ved en ulighed, og lav en skitse af D.

Vi spørger os selv: Kan funktionen give problemer på noget tidspunkt? Svaret er ja, hvis vi tager kvadratroden af noget negativt. Det vil sige, at det inde i kvadratroden skal være 0 eller større. Altså

$$2x - 6y^2 \geq 0.$$

Vi kan omskrive dette ved at lægge $6y^2$ til på begge sider

$$2x \geq 6y^2,$$

hvorefter vi kan dividere med 2 på begge sider:

$$x \geq 3y^2.$$

Dette svarer til en parabel, 'der ligger ned' en større forklaring kan findes i eksamenssættet for 2016.[3]

b. Udregn de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Vi skal bruge kædereglen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Desværre tror jeg ikke, at I lærer den her måde at skrive det på på GBE, så lad os i stedet bruge kædereglen på formen:

$$(h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Vi definerer

$$h(g) = \sqrt{g}, \qquad g(x,y) = 2x - 6y^2.$$

Den ydre funktions afledede ændrer sig ikke, om det er $\frac{\partial f}{\partial x}$ eller $\frac{\partial f}{\partial y}$, der skal regnes, da den ydre differentieres i forhold til den indre funktion. Vi differentierer:

$$h'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{g(x,y)}} = \frac{1}{2\sqrt{2x - 6y^2}},$$

hvor vi erstatter g med funktionen. Vi kan nu differentiere den indre funktion i forhold til både x og y:

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 2 \\ g_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = -6 \cdot 2y = -12y. \end{aligned}$$

Dermed kan vi nu udregne de partielle afledede:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= h'(g(x,y)) \cdot g_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2x - 6y^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x - 6y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= h'(g(x,y)) \cdot g_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2x - 6y^2}} \cdot (-12y) = -\frac{6y}{\sqrt{2x - 6y^2}}. \end{aligned}$$

[3] Jeg er lidt doven.

c. Bestem en ligning for de punkter (x, y, z), der tilhører tangentplanet for f's graf i punktet $(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, f(4, -1))$.

Tangentplanet er generelt givet ved

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0),$$

hvor $f_x = \partial f/\partial x$ og $f_y = \partial f/\partial y$. Vi mangler altså at udregne 3 værdier. Vi indsætter punktet:

$$\begin{aligned}
f(4, -1) &= \sqrt{2 \cdot 4 - 6 \cdot (-1)^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2} \\
f_x(4, -1) &= \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 4 - 6 \cdot (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\
f_y(4, -1) &= -\frac{6 \cdot (-1)}{\sqrt{2 \cdot 4 - 6 \cdot (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Bemærk, at jeg anvender omskrivningen $2 = \sqrt{2}^2$, da kvadratrod og potens 'spiser' hinanden. Eftersom der divideres med $\sqrt{2}$ spiser denne kvadratrod den ene af de to kvadratrødder i tælleren.[4] Vi indsætter nu vores fundne tal i formlen nævnt i starten af opgaven:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2}(x - 4) + 3\sqrt{2}(y - (-1)) + \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}x - 4\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}(x - 4 + 3y + 3 + 1) \\
&= \sqrt{2}(x + 3y),
\end{aligned}$$

hvor jeg har taget $\sqrt{2}$ uden for en parentes, da denne indgår i alle ledene. Altså kan tangentplanets lining gives ved

$$z = \sqrt{2}(x + 3y).$$

d. Bestem z sådan at tangentplanet fra spørgsmål (c) indeholder (x, y, z) for $x = 5$ og $y = 0$.

Vi indsætter blot $x = 5$ og $y = 0$ i tangentplanets ligning fra før:

$$z = \sqrt{2}(5 + 3 \cdot 0) = \sqrt{2}(5 + 0) = 5\sqrt{2}.$$

Altså er $z = 5\sqrt{2}$, hvis punktet med koordinaterne $x = 5$ og $y = 0$ skal ligge i tangentplanet.

[4] Der er jo to, da vi har kvadratroden i anden.

Problem 5

Find maksimumværdien $\max_V f(x_1, x_2)$, og også det punkt (x_1^*, x_2^*) hvor $f(x_1, x_2)$ antager sin maksimale værdi, idet

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2,$$

og idet V er området, hvori (x_1, x_2) opfylder ulighederne:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

foruden at $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. (Man kan bruge den geometriske metode eller simplex metoden).

Svar 1: Den geometriske metode

Lad os først kigge på, hvordan vi får tegnet linjerne. Planen er at sætte $x_1 = 0$ først og så finde en tilhørende værdi for x_2. Derefter kan vi sætte $x_2 = 0$ og så finde den tilhørende værdi for x_1. Vi betragter desuden 'lighed' frem for ulighed:

$$x_1 + 2x_2 = 20.$$

Indsættes $x_1 = 0$ fås:

$$0 + 2x_2 = 2x_2 = 20 \Leftrightarrow x_2 = \frac{20}{2} = 10.$$

Altså giver den ligning et punkt $(0, 10)$. Tilsvarende for $x_2 = 0$:

$$x_1 + 2 \cdot 0 = x_1 = 20.$$

Dermed er $(20, 0)$ også et punkt på linjen. Vi kan altså forbinde punkterne $(20, 0)$ og $(0, 10)$. Dette giver den grønne linje som ses nedenunder.

Vi kigger nu på ligningen

$$2x_1 + x_2 = 30.$$

Lad $x_1 = 0$, så får vi

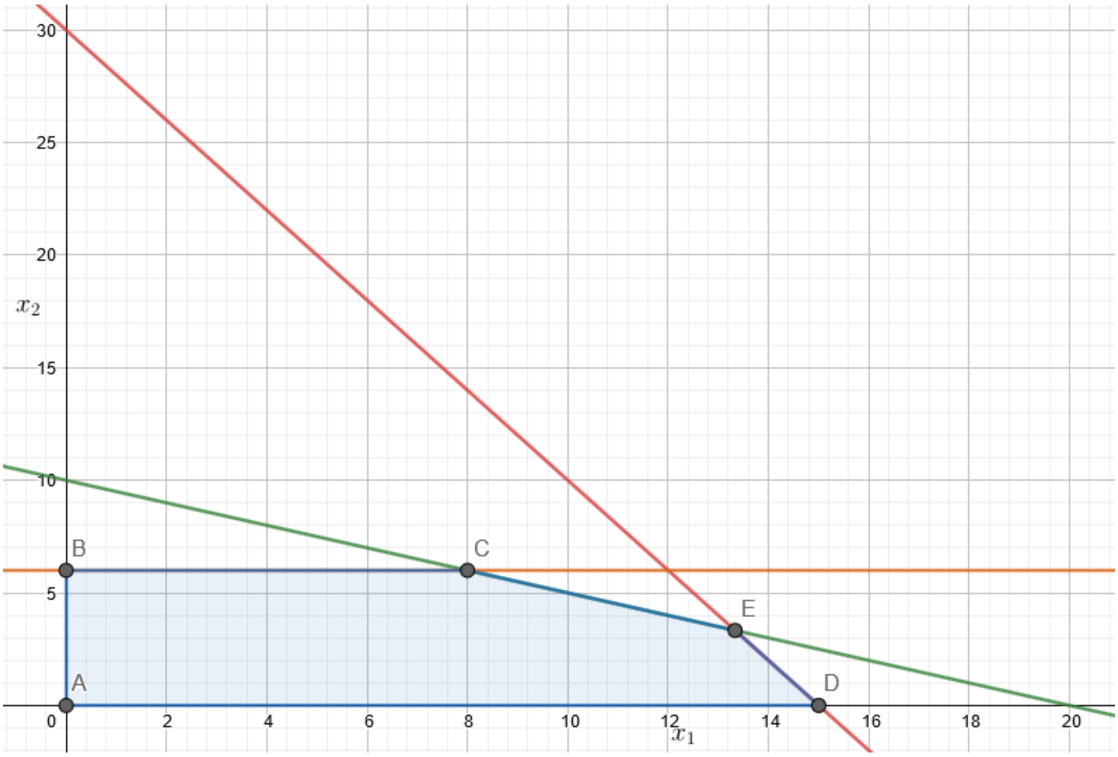
$$2 \cdot 0 + x_2 = x_2 = 30.$$

Dermed er $(0, 30)$ et punkt på linjen. Sættes $x_2 = 0$ fås ligeledes:

$$2 \cdot x_2 + 0 = 2x_2 = 30 \Leftrightarrow x_2 = \frac{30}{2} = 15.$$

Altså er $(0, 15)$ et punkt på linjen. Altså forbinder vi blot punkterne $(0, 30)$ og $(15, 0)$, hvilket giver den røde linje på figuren.

Slutteligt kigger vi på $x_2 = 6$. Men det er jo bare en konstant linje, hvorfor vi får den orange linje i figuren. Vi kan kun bruge punkter på og under linjerne grundet ulighederne. Dette giver det blå område i figuren med de angivne hjørnepunkter:



Vi skal maksimere

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2,$$

hvorfor vi principielt bare kan indsætte alle punkterne, der er markeret i grafen, i funktionen og vælge den største værdi, der kommer ud af det. Men vi kan også lige sortere nogle fra, hvis vi ikke gider regne så meget. Da der er plus mellem variablene i funktionen, så skal vi bare øge x_1 og x_2 så meget, vi kan. Starter vi i A kan vi både øge x_1 og x_2 uden at reducere en anden variabel. Altså er både B og D større værdier. Ligeledes kan vi gå fra B til C ved blot at øge x_1, hvorfor C giver en større værdi end B. Vi kan ikke gå mellem C, D og/eller E, da forøgelsen af en variabels værdi fører til reduktion af den anden. Vi skal altså først finde punkterne C og E. Vi kender D, da denne blot er skæringen, vi udregnede før. Vi kender også x_2-koordinatet for C, da denne er skæringen mellem den orange og grønne linje, og da den orange konstant er $x_2 = 6$, så må C også have dette koordinat. Vi kan da udregne x_1 ved at indsætte $x_2 = 6$ i ligningen for den grønne linje. Vi får:

$$x_1 + 2 \cdot 6 = x_1 + 12 = 20 \Leftrightarrow x_1 = 20 - 12 = 8.$$

Altså er $C = (8, 6)$. Vi betragter nu linjerne

$$x_1 + 2x_2 = 20, \qquad 2x_1 + x_2 = 30,$$

da skæringen mellem disse er punktet E. Vi isolerer først x_1 i den første ligning:

$$x_1 + 2x_2 = 20 \Leftrightarrow x_1 = 20 - 2x_2.$$

Denne værdi for x_1 kan nu indsættes i den anden ligning, hvorved vi får:

$$2x_1 + x_2 = 2(20 - 2x_2) + x_2 = 40 - 4x_2 + x_2 = 40 - 3x_2 = 30 \Leftrightarrow -3x_2 = 30 - 40 = -10 \Leftrightarrow x_2 = \frac{10}{3}.$$

Altså er $x_2 = \frac{10}{3}$. Vi indsætter nu den værdi i $x_1 = 20 - 2x_2$ fra før:

$$x_1 = 20 - 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{60}{3} - \frac{20}{3} = \frac{40}{3}.$$

Dermed er $E = \left(\frac{40}{3}, \frac{10}{3}\right)$. Vi indsætter nu C, D og E i funktionen, der skulle maksimeres, og vi får:

$$\begin{aligned}
f(C) &= f(8,6) = 2 \cdot 8 + 7 \cdot 6 = 16 + 42 = 58 \\
f(D) &= f(15,0) = 2 \cdot 15 + 7 \cdot 0 = 30 + 0 = 30 \\
f(E) &= f\left(\frac{40}{3}, \frac{10}{3}\right) = 2 \cdot \frac{40}{3} + 7 \cdot \frac{10}{3} = \frac{80}{3} + \frac{70}{3} = \frac{150}{3} = 50.
\end{aligned}$$

Vi ser, at $\max_V f(x_1, x_2) = 58$, hvor $(x_1^*, x_2^*) = (8, 6)$.

Svar 2: Simplex-metoden

Vi introducerer slack-variablene, S_1, S_2, S_3, til ligningssystemet, således vi får ligheder frem for uligheder:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + S_1 &= 20 \\
2x_1 + x_2 + S_2 &= 30 \\
x_2 + S_3 &= 6,
\end{aligned}$$

samt slack-variablen S_4 til vores funktionsværdi, således at

$$2x_1 + 7x_2 = S_4 \Leftrightarrow -2x_1 - 7x_2 + S_4 = 0$$

Vi kan nu opstille matricen for ligningsystemet:

$$\begin{bmatrix}
x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
-2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Vi vælger nu at pivotere omkring den søjle, som har laveste (negative) værdi i nederste række. Dette er værdien -7, hvilket svarer til søjle nummer 2. Vi finder nu, hvilken række vi skal kigge på. Da $20/2 = 10$, $30/1 = 30$, $6/1 = 6$, vælger vi tredje række, da denne giver det laveste forhold. Vi skal altså have 0'er i rækkerne over og under række 3's søjle 2:

$$\begin{bmatrix}
x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
-2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\xrightarrow[r_4 + 7r_3 \to r_4]{\substack{r_1 - 2r_3 \to r_1 \\ r_2 - r_3 \to r_2}}
\begin{bmatrix}
x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\
2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 24 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 42
\end{bmatrix}.$$

Vi kan nu kun vælge søjle 1, da denne er den eneste med et negativt tal i nederste søjle. Indgangen vi skal pivotere omkring findes ved at sige $8/1 = 8$ og $24/2 = 12$, hvilket vil sige, at vi vælger række 1. Vi får altså:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 42 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_2 \to r_4]{r_2-2r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 58 \end{bmatrix}$$

Da der ikke er flere negative værdier i sidste søjle, er vi færdige. Eftersom x_1-søjlen har pivot i første række, kan vi aflæse, at $x_1 = 8$. Tilsvarende for x_2-søjlen er 3. række pivot, hvorfor vi aflæser $x_2 = 6$. Det betyder, at vi har maksimum i punktet $(x_1^*, x_2^*) = (8, 6)$. Værdien, som dette punkt giver, ses i det nederste højre hjørne. Altså er den maksimale værdi, $\max_V f(x_1, x_2) = 58$. Dette stemmer også ens med, hvad vi fandt i den geometriske metode.