Besvarelser til Lineær Algebra og Calculus Globale Forretningssystemer Eksamen - 6. Juni 2016

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

a. Differentiér funktionen $f(x) = \frac{4}{x^2} + \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Vi kan differentiere de to led hver for sig. Betragt først $4/x^2$. Måden jeg differentierer potenser i nævneren på er ved at lave følgende omskrivning:

$$\frac{4}{x^2} = 4x^{-2}.$$

For et tilfældigt tal $a \neq 0$ gælder nemlig, at $\frac{1}{a} = a^{-1}$. Derfor kan vi bruge, at den afledte af x^n bliver nx^{n-1}. Dermed er

$$\left(\frac{4}{x^2}\right)' = \left(4x^{-2}\right)' = (-2)4x^{-3} = -8x^{-3} = \frac{-8}{x^3}.$$

For det næste led huskes det, at $\ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$. Derudover husker vi, at $(\ln(x))' = 1/x$. Vi får altså:

$$\left(\ln\frac{x}{2}\right)' = (\ln x - \ln 2)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Det bemærkes, at $\ln 2$ forsvinder, da det er en konstant, og når man differentierer en sådan, så bliver de til 0. Altså er:

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{1}{x}$$

b. Bestem ligningen for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Tangentens ligning er givet ved

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Vi mangler altså blot at udregne $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = f'(2) = -\frac{8}{2^3} + \frac{1}{2} = -\frac{8}{8} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Altså er tangentens ligning

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{2} + 1 = -\frac{1}{2}x + 1 + 1 = -\frac{1}{2}x + 2.$$

c. Bestem den afledede funktion for $g(x) = \ln(\sin(x))$.

Vi skal nu bruge kædereglen. Kædereglen siger (i ord), at den indre funktion, $\sin(x)$, skal differentieres i forhold til x og ganges med den ydre funktion $\ln(y)$ differentieret i forhold til y, hvor $y = \sin(x)$. Vi differentierer altså hver af disse funktioner og får:

$$(\sin(x))' = \cos x, \qquad (\ln(y))' = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Ganges disse sammen fås den afledede funktion for $g(x)$:

$$g'(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

Bemærk, jeg lavede den sidste omskrivning af hensyn til næste opgave.

d. Udregn arealet A af det område, der er afgrænset af linierne $x = \pi/4$, $x = \pi/2$ og $y = 0$ samt af grafen for funktionen $h(x) = \cot(x)$.

Arealet kan findes ved at integrere funktionen over det område, der er afskærmet. Husk på, at vi fra forrige opgave så, at $g'(x) = \cot(x)$. Derfor er $h(x) = g'(x)$. Men hvis man integrerer en differentieret funktion, så kommer man tilbage til den oprindelige funktion. Da $\int g'(x)\,dx \equiv g(x)$ er

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} h(x)\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} g'(x)\,dx = [g(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} = [\ln\sin(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Vi ved, at $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ og $\sin(\pi/2) = 1$. Vi husker også, at $\ln(1) = 0$, samt at $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, og $\ln(a^n) = n\ln(a)$[1]:

$$\ln(1) - \ln\left(\frac{\sqrt{(2)}}{2}\right) = -\left(\ln(\sqrt{2}) - \ln(2)\right) = -\left(\ln(2^{\frac{1}{2}}) - \ln(2)\right) = -\left(\frac{1}{2}\ln(2) - \ln(2)\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Hvis du ikke helt forstår sidste udregning, så prøv at kalde $\ln(2)$ for b i stedet:

$$-\left(\frac{1}{2}b - b\right) = -\left(\frac{1}{2} - 1\right)b = -\left(-\frac{1}{2}\right)b = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Man har jo $1/2$ af b og så trækker man en hel b fra. Så er der altså minus en halv b tilbage.

[1] Kvadratroden kan skrives som en halv potens. Altså $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Problem 2

To linjer L_1 og L_2 i rummet er givet ved følgende parameterfremstillinger, hvori $t \in \mathbb{R}$,

$$L_1\colon \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}_1 + t\mathbf{r}_1, \qquad \text{med } \mathbf{u}_1 = (4, 5, -6) \text{ og } \mathbf{r}_1 = (3, 2, 1), \tag{3.1}$$

$$L_2\colon \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}_2 + t\mathbf{r}_2, \qquad \text{med } \mathbf{u}_2 = (2, 0, 1) \text{ og } \mathbf{r}_2 = (1, -1, 1). \tag{3.2}$$

a. Udregn krydsproduktet $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Begrund dernæst, at L_1 og L_2 hverken er parallelle eller sammenfaldende.

Krydsproduktet kan opskrives som

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{k}.$$

Vi skal nu blot udregne de tre determinanter. Vi får:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3$$
$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2$$
$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 - 2 = -5.$$

Altså er krydsproduktet:

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Husk, at $\mathbf{n}$ er en vektor, der står vinkelret på både $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$, som er retningsvektorerne for de to linjer. Ydermere svarer længden af $\mathbf{n}$ til arealet af parallellogrammet udspændt af de to vektorer. Hvis $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ er parallelle, så vil de kun udspænde areal på 0, hvilket kun er 0-vektoren, der opfylder dette. Da retningsvektorerne kun indikerer linjernes hældninger (retninger), så ville $\mathbf{n}$ ikke sige specifikt, om de er parallelle eller sammenfaldne, HVIS $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Vi er dog i tilfældet, hvor $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}$, hvorfor vi kan konkludere, at de hverken er parallelle eller sammenfaldne. - De må altså skære på et tidspunkt.[2]

b. Opskriv de symmetriske ligninger både for L_1 og for L_2.

Husk, at hvis en linje er givet ved

$$\ell\colon \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{r}, \qquad \text{med } \mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0) \text{ og } \mathbf{r}_1 = (a, b, c), \tag{3.3}$$

[2] Bemærk, jeg har inkluderet langt mere forklaring, end hvad der er brug for. Disse besvarelser skal udelukkende fungere som hjælp til forståelsen.

da er de tilsvarende symmetriske ligninger følgende

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Derfor fås

$$\begin{aligned} L_1\colon \quad & \frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-(-6)}{1} \\ L_2\colon \quad & \frac{x-2}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-1}{1}. \end{aligned}$$

Bemærk, at de symmetriske ligninger for L_1 kan reduceres til følgende:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{2}=z+6,$$

og tilsvarende kan de symmetriske linginger for L_2 reduceres til

$$x-2=-y=z-1.$$

c. Find $x-$ og $y-$koordinaterne for et eventuelt skæringspunkt $P=(x,y,a)$ til L_1 og L_2.

Vi skal bruge forrige opgave. Og lad så bare se bort fra ligningerne med z i, da det kun er x og y, der er af interesse. Så har vi:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{2}, \qquad x-2=-y.$$

Fedt. I den sidste ligning kan vi isolere y ved at gange med -1 på begge sider. Dvs. $y=2-x$. Denne relation skal være opfyldt for x og y koordinaterne i linje L_2. Vi kan da prøve at smide $2-x$ ind på pladsen for y i ligningen for L_1. Vi får:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{(2-x)-5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{3}=\frac{-x-3}{2}. \qquad [3]$$

Da der står 3 og 2 i nævnerne på hver side, kan vi lige gange hver side med 6 (eller gange med 3 og gange med 2 på samme tid):

$$\frac{x-4}{3}\cdot 3\cdot 2=\frac{-x-3}{2}\cdot 3\cdot 2 \Leftrightarrow (x-4)\cdot 2=(-x-3)\cdot 3.$$

Ganges ind i parenteserne fås

$$2x-8=-3x-9.$$

Lad os lægge 3x og 8 til på begge sider. Så fås:

$$5x=-1.$$

Divideres med 5 findes x til at være:

$$x=-\frac{1}{5}.$$

Husk, at $y=2-x$, hvorfor

$$y=2-\left(-\frac{1}{5}\right)=2+\frac{1}{5}=\frac{10}{5}+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}.$$

Disse værdier af x og y passer i begge ligningerne for L_1 og L_2 (tjek selv, hvis du er usikker). Det eventuelle skæringspunkt vil altså være $P=(-\frac{1}{5},\frac{11}{5},a)$.

[3]Bemærk, jeg laver kun '$\Leftrightarrow$', da jeg ved, hvor forvirret, I bliver, når man pludselig sætter et ekstra '$=$' i ligningssystemer. I må gerne sætte '$=$', da højre-siderne er ens.

d. Afgør om L_1 og L_2 har et skæringspunkt, eller om de ligger vindskævt.

Vi fandt det eventuelle skæringspunkt i forrige opgave. Dette punkt er det ENESTE, der opfylder, at x og y koordinaterne opfylder de symmetriske ligninger for både L_1 og L_2. Vi mangler blot at tjekke, om disse så giver samme z koordinat, når vi bruger de fundne x (eller y koordinater). I L_1 har vi, at[4]:

$$\frac{x-4}{3} = z_1 + 6 \Leftrightarrow z_1 = \frac{x-4}{3} - 6 = \frac{x-4}{3} - \frac{18}{3} = \frac{x-22}{3},$$

hvor vi efter '$\Leftrightarrow$' har isoleret z_1. Nu kan værdien for x, $-1/5$, indsættes:

$$z_1 = \frac{\frac{1}{5} - 22}{3} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{110}{5}}{3} = \frac{-109}{5 \cdot 3} = -\frac{109}{15}.$$

Vi har nu værdien for den z, $z_1 = -109/15$, som skal bruges for at få punktet til at ligge på L_1. Vi kan nu kigge på L_2:

$$x - 2 = z_2 - 1 \Leftrightarrow z_2 = x - 1.$$

Indsætter vi punktet $x = -1/5$ fås:

$$z_2 = \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{4}{5}.$$

Spørgsmålet er nu, er $z_1 = z_2$? Nej, for $z_2 - \frac{4}{5} = -\frac{12}{15}$, og da $-\frac{12}{15} \neq -\frac{109}{15}$ er $z_2 \neq z_1$.

Da z-koordinaterne ikker er ens for de to linjer, når x- og y-koordinaterne passer, kan vi konkludere, at linjerne ikke skærer hinanden. Derfor er disse vindskæve.

[4] Vi kigger kun på én lighed, da vi har etableret, at x og y relationerne er passer i dette punkt, P.

Problem 3

Her betragtes det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 - 14x_4 &= -19 \\ -x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 17x_4 &= 23. \end{aligned}$$

a. Bestem totalmatricens reducerede echelonform. Angiv dernæst systemets løsningsmænde.

Først opskrives totalmatricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & -14 & -19 \\ -1 & 6 & 10 & 17 & 23 \end{bmatrix}.$$

Lægger vi blot række 1 til række 2 opnås:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & -14 & -19 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu lægge 5 gange række 2 til række 1. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu skrive dette tilbage som et ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi opskrive følgende løsning:

$$\begin{aligned} &x_1 = 1 - 2x_3 - x_4 \\ &x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4 \\ &x_3 \text{ er en fri variabel} \\ &x_4 \text{ er en fri variabel.} \end{aligned}$$

En anden måde at opskrive systemets løsningsmængde på er ved at bruge de frie variable i følgende omskrivning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 - x_4 \\ 4 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den midterste opskrivning er udelukkende med for forståelsens skyld. Man skriver kun den version i form af ligningssystemet, hvor 'fri variabel' er noteret. Normalvis skriver man altså kun:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b. Opskriv løsningsmængden for det tilhørende homogene ligningssystem. Angiv dernæst hvordan koefficientmatricens 3. søjle, $\mathbf{a}_3$, kan skrives som linearkombination af dens to første søjler, $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

Det homogene ligningssystem svarer til at have højreside, der er nul i ligningsystemet. Det vi sige, at vi blot fjerner den vektor, der ikke er ganget på en variabel. Løsningsmængden er altså:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Husk, at en linearkombination for $\mathbf{a}_3$ af $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ betyder, at vi kan skrive $\mathbf{a}_3 = \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2$, hvor α og β er skalarer (tal). Vi fandt i opgave a matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Af denne kan α og β aflæses direkte. Vi skal kigge på 3. søjle, da det er $\mathbf{a}_3$, vi gerne vil finde en linearkombination for. Første række indikerer α, da denne knytter sig til $\mathbf{a}_1$. Anden række indikerer β, da denne knytter sig til $\mathbf{a}_2$. Vi ser altså, at $\alpha = \beta = 2$. Det vil sige, at facit er:

$$\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2.$$

Følgende behøves ikke medtages, men skal vi lige være sikre? Jamen lad os se på koefficientmatricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & -14 \\ -1 & 6 & 10 & 17 \end{bmatrix}.$$

Vi aflæser søjler til

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Lad os se, om vores linearkombination virker:

$$2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_3.$$

Amen det passer jo! Så dygtige vi er.

c. Angiv hvilke af matrixprodukterne AB, AC, BC, BA, CA, og CB, der er definerede, og bestem disse idet

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

.

For at et matrixprodukt er defineret skal dimensionerne stemme overens. Det vil sige, hvis K_1 er en $n \times m$-matrix, og K_2 er en $q \times r$-matrix, og produktet $K_1 K_2$ skal være veldefineret, så:

$$K_1 K_2 \Rightarrow (n \times \underbrace{m)(q}_{m=q} \times r) = n \times r.$$

De inderste dimensioner skal altså passe.

$$\begin{aligned} &AB \Rightarrow (3 \times 3)(1 \times 3), \quad &&AC \Rightarrow (3 \times 3)(3 \times 1), \quad &&BC \Rightarrow (1 \times 3)(3 \times 1) \\ &BA \Rightarrow (1 \times 3)(3 \times 3), \quad &&CA \Rightarrow (3 \times 1)(3 \times 3), \quad &&CB \Rightarrow (3 \times 1)(1 \times 3). \end{aligned}$$

Vi udregner nu de 4 produkter (hvis søjlerne er svære at skelne mellem, sætter jeg et komma):

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1, & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3, & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 + 0 + 2, & 0 - 1 + 6, & 0 + 1 - 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$AC = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 0 + 1 \\ 0 - 2 + 1 \\ 3 + 6 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0 + 2 + 2 = 4$$

$$CB = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

d. Afgør om A kommuterer med B, og dernæst om B kommuterer med C. Begrund svarene.

BA giver en matrix (vektor), hvorimod AB ikke er defineret. Derfor kan $AB = BA$ umuligt passe. Det ses endvidere, at $CB \neq BC$ fra opgave c. Det ene produkt giver en skalar, den anden en matrix. En skalar og en matrix er ikke det samme.

Problem 4

a. Bestem definitionsmængden D for funktionen $f(x,y) = \sqrt{8x - 2y^2}$ præcist ved hjælp af en ulighed og lav en skitse af D.

Vi ved, at vi ikke må tage kvadratroden af noget negativt (vi arbejder med de reelle tal, $\mathbb{R}$). Det vil sige, at det inden i kvadratroden skal være positivt eller 0. Altså:

$$8x - 2y^2 \geq 0.$$

Vi kan da lægge $2y^2$ til på begge sider - hvis vi altså har lyst.

$$8x \geq 2y^2.$$

Divideres med 8 på begge sider opnås:

$$x \geq \frac{1}{4}y^2,$$

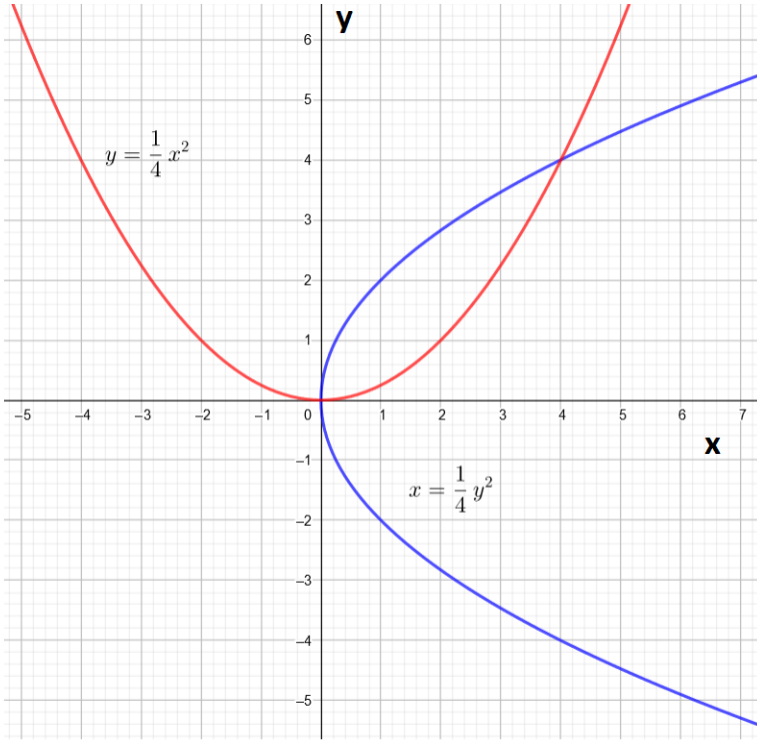
da $2/8 = 1/4$. Vi kan altså blandt andet skrive definitionsmængden på følgende måder:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 8x - 2y^2 \geq 0\}$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 8x \geq 2y^2\}$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{1}{4}y^2\}.$$

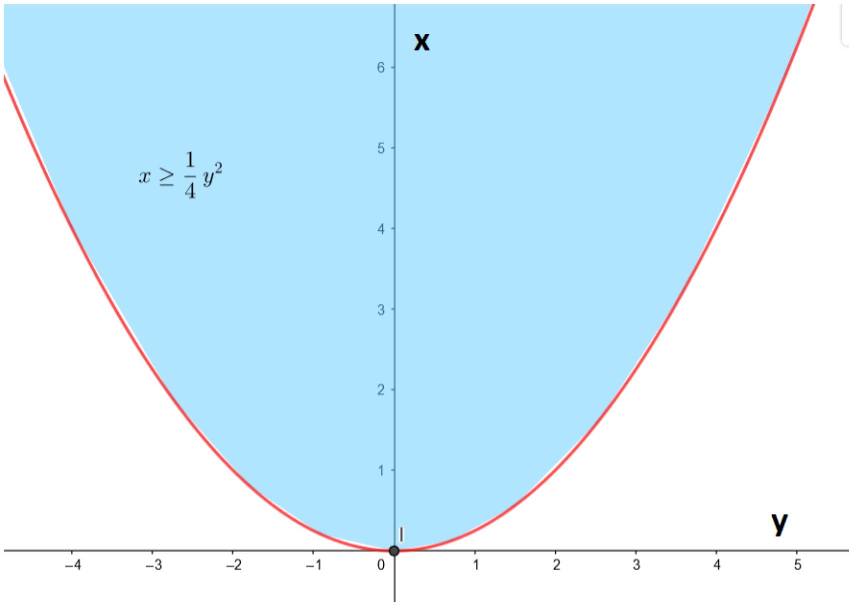
Hvis alle er enige om, at der er tale om reelle tal, og at x og y er variabel-parret, kan vi nøjes med at skrive en af følgende:

$$D = \{8x - 2y^2 \geq 0\}$$
$$D = \{8x \geq 2y^2\}$$
$$D = \{x \geq \frac{1}{4}y^2\}.$$

Lad os kigge på det udtrykket $x \geq \frac{1}{4}y^2$. Så kan vi prøve at kigge på 'lig med', altså $x = \frac{1}{4}y^2$. I figuren på næste side ses to funktioner. Den ene er den kendte parabel, hvor y er en funktion af x med forskriften $y = \frac{1}{4}x^2$, dvs. en funktion, hvor vi har byttet rundt på x og y. Parabler har den generelle forskrift $y = ax^2 + bx + c$ og har altid formen som den røde figur. De kan dog være mere voksende eller aftagende. Om den åbner opad eller nedad afhænger af, om a er positiv eller negativ. I vores tilfælde afhænger x dog af y, $x = \frac{1}{4}y^2$, hvilket er angivet med blå. Hvis man har tegnet den røde funktion, det vil sige, hvor x og y har byttet plads, så kan man opnå den blå ved at rotere grafen 90 grader med uret og dernæst spejle grafen i x-aksen. Spejlingen er dog ligegyldig i dette tilfælde, da andengradspolynomiet er symmetrisk omkring toppunktet (i dette tilfælde origo).



Hvis man vil 'snyde' lidt, så kan man utraditionelt vælge at kalde anden-aksen for x-aksen og første-aksen for y-aksen. Så slipper man for at rotere og spejle og kan derfor tegne den direkte:



Bemærk, at det lyseblå område er definitionsmængden. Dette gælder selvfølgelig også de punkter, der ligger PÅ linjen, da D har punkterne med '$\geq$' og ikke blot '$>$'. Vi ved, at x'erne skal være større end eller lig med den tegnede linje, hvorfor D er det markerede område.

b. Udregn de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Vi skal bruge kædereglen. Det vil sige, at vi skal vide, hvordan man differentierer kvadratroden. Derudover skal vi også kunne differentiere 'indmaden' af kvadratroden. Vi kan slå følgende op i en tabel:

$$h(z) = \sqrt{z} \Rightarrow h'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Kædereglen siger, at vi skal differentiere 'den ydre funktion' og gange med 'den indre funktion' differentieret. Den ydre funktion er kvadratroden. Hvis vi sætter $z = 8x - 2y^2$ i ovenstående, får vi altså den ydre funktion differentieret:

$$h'(8x - 2y^2) = \frac{1}{2\sqrt{8x - 2y^2}}.$$

Nu skal vi bare differentiere den indre funktion, som er $g(x) = 8x - 2y^2$, i forhold til både x og y respektivt (subscript x betyder, at der er differentieret i forhold til x. Det samme gælder y):

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= 8 \\ g_y(x, y) &= -2 \cdot 2y = -4y. \end{aligned}$$

De partielle afledede kan nu udregnes ved $f_x(x, y) = h'(8x - 2y^2) \cdot g_x(x, y)$ og $f_y(x, y) = h'(8x - 2y^2) \cdot g_y(x, y)$. Vi får:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{8x - 2y^2}} \cdot 8 = \frac{8}{2\sqrt{8x - 2y^2}} = \frac{4}{\sqrt{8x - 2y^2}} \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{8x - 2y^2}} \cdot (-4y) = -\frac{4y}{2\sqrt{8x - 2y^2}} = -\frac{2y}{\sqrt{8x - 2y^2}}. \end{aligned}$$

c. Bestem en ligning for de punkter, (x, y, z), der tilhører tangentplanet for f's graf i det punkt (x_0, y_0, z_0), hvor $x_0 = 3$, $y_0 = -2$ og $z = f(3, -2)$.

Tangentplanets ligning kan helt generelt skrives:

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Vi skal altså blot indsætte punktet $(x_0, y_0) = (3, -2)$ i de forskellige funktioner. Vi finder

$$\begin{aligned} f(3, -2) &= \sqrt{8 \cdot 3 - 2(-2)^2} = \sqrt{24 - 2 \cdot 4} = \sqrt{24 - 8} = \sqrt{16} = 4 \\ f_x(3, -2) &= \frac{4}{\sqrt{8 \cdot 3 - 2(-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{24 - 2 \cdot 4}} = \frac{4}{\sqrt{24 - 8}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1 \\ f_y(3, -2) &= -\frac{2 \cdot (-2)}{\sqrt{8 \cdot 3 - 2(-2)^2}} = -\frac{-4}{\sqrt{24 - 2 \cdot 4}} = \frac{4}{\sqrt{24 - 8}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte de fundne værdier i tangentplanets generelle ligning:

$$z = 1(x - 3) + 1(y - (-2)) + 4 = x - 3 + y + 2 + 4 = x + y + 3.$$

Altså er tangentplanets ligning givet ved

$$z = x + y + 3.$$

d. Find ved hjælp af tangentplanets ligning en tilnærmelse til f's funktionsværdi i det punkt, hvor $x = 3.03$ og $y = -1.91$.

Da tangentplanet er approksimativt funktionen f i en omegn omkring $(3, -2)$, kan vi bruge dennes ligning, som opgaven antyder, til at finde en tilnærmet funktionsværdi. Vi har:

$$f(3.03, -1.91) \approx z = 3.03 - 1.91 + 3 = 4.12.$$

Altså er funktionsværdien approksimativt 4.12 i punktet $x = 3.03$ og $y = -1.91$.

Problem 5

Find maksimumværdien $M^* = \max_V f(x_1, x_2)$, tillige med det punkt (x_1^*, x_2^*), hvori $f(x_1, x_2)$ antager sin maksimale værdi, idet

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2.$$

Herved betegner V det område, hvori (x_1, x_2) foruden at $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ opfylder ulighederne:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 11 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 5. \end{aligned}$$

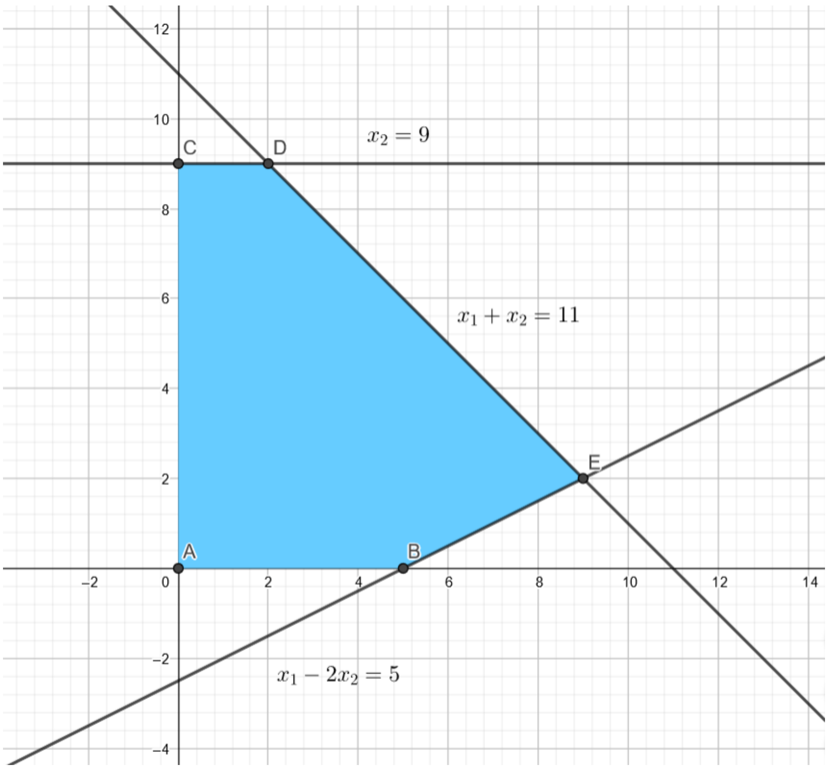
(Man kan bruge den geometriske metode, eller simplex metoden).

Den geometriske metode:

Vi starter med at tegne linjerne. Dette gøres ved at bruge '=' frem for uligheder. Vi kigger altså linjen $x_2 = 9$. Jeg placerer x_2 på y-aksen (anden-aksen), hvorfor y er konstant 9. Endvidere giver $x_1 + x_2 = 11$ en linje, som har skæring 11 på både x-(første-aksen) og y-aksen, da skæring med x-aksen svarer til $x_2 = 0$, hvilket betyder, at $x_1 + 0 = 11$. Tilsvarende for y-aksen er $x_1 = 0$, hvorfor $0 + x_2 = 11$. Derudover kigges på linjen $x_1 - 2x_2 = 5$, hvor vi kigger på skæringerne:

$$x_1 = 0\colon\ 0 - 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2} = -2.5, \qquad x_2 = 0\colon\ x_1 - 2 \cdot 0 = 5 \Leftrightarrow x_1 = 5.$$

Så den sidste linje skærer altså x- og y-aksen i henholdsvis $x = 5$ og $y = -2.5$. Laver vi skæringspunkterne med x- og y-aksen og forbinder disse to for hver af linjerne, får vi følgende område:



Det blå område er, som det er, grundet ulighederne. Husk, at x_1 og x_2 skal være større end 0. $x_2 \leq 9$ betyder blot, vi skal være under denne horisontale linje. Så længe fortegnet er positivt for både x_1 og x_2 som i $x_1 + x_2 \leq 11$, så skal vi blot kigge på arealet under linjen. I tilfældet med $x_1 - 2x_2 \leq 5$ kan vi lave følgende omskrivning $x_1 \leq 5 + 2x_2$ og videre $x_1 - 5 \leq 2x_2$. Slutteligt kan vi lige dividere med 2 på begge sider $\frac{1}{2}x_1 - 2.5 \leq x_2$. Det betyder, at x_2, eller y-variablen, skal være større end linjen $\frac{1}{2}x_1 - 2.5$, som er den, vi har tegnet.

Da det er et lineært system kan vi blot tjekke hjørnepunkter. Men lad os også lige bruge udelukkelsesmetoden, så vi ikke skal finde og udregne dem alle. Vi skal maksimere funktionen $4x_1 + x_2$. Da de to variable er lagt sammen, skal vi altså bare gøre x_1 og x_2 så store som muligt. Hvis vi starter i punkt A, som ses på figuren, så kan vi gøre x_1 større ved at bevæge os ud til punkt B uden, at der ændres på x_2. Altså må B give en større værdi end A. Vi kan så se, at vi faktisk kan øge x_1 og x_2 ved at gå hen til E frem for B. Dermed må E være en større værdi en B. Hvis vi stod i A kunne vi også øge x_2 og beholde x_1 ved at gå til C. Dermed må C give en større værdi end A. Endvidere kan vi fortsætte til D ved blot at øge x_1. Vi kan ikke gå mellem D og E uden at reducere den ene af værdierne, så principielt skal vi tjekke dem begge.

Før vi kan tjekke punkterne, skal vi først lige vide, hvad værdierne af x_1 og x_2 er i disse. Punktet D findes ved at finde skæringen mellem linjen $x_2 = 9$ og linjen $x_1 + x_2 = 11$. Men den første linje kræver, at $x_2 = 9$, så vi kender allerede x_2. Denne kan vi så indsætte i den anden linje, hvorved

$$x_1 + 9 = 11 \Leftrightarrow x_1 = 11 - 9 = 2.$$

Altså er $D = (2, 9)$. Lad os nu kigge på skæringen mellem $x_1 + x_2 = 11$ og $x_1 - 2x_2 = 5$. Vi finder, at

$$x_1 + x_2 = 11 \Leftrightarrow x_1 = 11 - x_2.$$

Dette kan så indsættes som værdi for x_1 i den anden linje:

$$x_1 - 2x_2 = 5 \Leftrightarrow 11 - x_2 - 2x_2 = 5 \Leftrightarrow 11 - 3x_2 = 5 \Leftrightarrow -3x_2 = 5 - 11 = -6 \Leftrightarrow x_2 = 2.$$

Vi kan nu bruge $x_2 = 2$ og indsætte i udtrykket for x_1:

$$x_1 = 11 - x_2 = 11 - 2 = 9.$$

Altså er punktet E givet ved koordinaterne $(9, 2)$. Vi kan nu indsætte punkterne i f:

$$\begin{aligned} f(D) &= f(2,9) = 4 \cdot 2 + 9 = 8 + 9 = 17 \\ f(E) &= f(9,2) = 4 \cdot 9 + 2 = 36 + 2 = 38. \end{aligned}$$

Altså er E det maksimale punkt.

Simplex metoden

Hvis vi skal bruge simplex metoden, skal vi have 'slack' variable med. Det vil sige, at vores ligningssystem går fra

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 11 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 5. \end{aligned}$$

til

$$\begin{aligned} x_2 + S_1 &= 9 \\ x_1 + x_2 + S_2 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + S_3 &= 5. \end{aligned}$$

Hvis vi kalder $f(x_1, x_2)$ for S_4, kan vi lave følgende opskrivning

$$S_4 = 4x_1 + x_2 \Leftrightarrow -4x_3 - x_2 + S_4 = 0.$$

Vi skriver nu matricen op for ligningssystemet:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vi skal nu pivotere i den søjle, som har det laveste tal i den nederste række. Det vil sige første søjle, da denne indeholder -4, som er det laveste tal. Måden vi vælger pivot-indgangen i denne søjle er ved at kigge på alle positive indgange (de skal være større end 0), det vil sige række 2 og 3 begge med værdierne 1. Vi går så ud i den sidste søjle og læser de tilsvarende værdier, 11 og 5. Vi siger så $11/1 = 11$ og $5/1 = 5$. Da 5 er det laveste tal af disse to, vælger vi at pivoterer omkring række 3 i søjle 1.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[r_4+4r_3 \to r_4]{r_2-r_3 \to r_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 4 & 1 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nu er -9 den mindste indgang i nederste række. Vi vælger altså at pivotere i søjle 2. I søjle 2 er det kun 1 og 3, som er positive tal. Vi går altså ud i højre side og aflæser værdierne 9 og 6. Vi ser, at $9/1 = 9$ og $6/3 = 2$. Da 2 er mindre end 9 vælger vi at pivotere omkring række 2 og søjle 2. Vi får ved at lave 3-tallet om til et 1-tal (dividere rækken med 3):

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 4 & 1 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2 \to r_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 4 & 1 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

Og pivoteringen giver da

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 4 & 1 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{\substack{r_1-r_2 \to r_1 \\ r_3+2r_2 \to r_3 \\ r_4+9r_2 \to r_4}} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 38 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Vi ser, at den nederste række ikke indeholder negative tal. Vi er altså i mål. Vi ser, at der er et 1-tal ud for x_1 (søjle 1) i række 3. Vi aflæser værdien i sidste søjle række 3. Denne er 9. Samme ses for x_2 i søjle 2, at der er pivot (et 1-tal) i række 2. Vi aflæser i sidste søjle værdien 2. Altså er $x_1 = 9$ og $x_2 = 2$. Vi ser desuden, at dette punkt giver funktionsværdien 38, hvilket ses nederst i højre hjørne. Det var også, hvad vi fandt ud af i den geometriske metode.