Besvarelser til Lineær Algebra
Ordinær Eksamen - 5. Januar 2018

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Find det rigtige udsagn.

Svar:

Den "lange"metode ville være at rækkereducere.

Lad os i stedet prøve at bruge udelukkelsesmetoden. For det første: Der kan ikke være 2 løsninger. Enten er der uendeligt mange, én eller ingen løsninger.

Hvis $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 3$ er en løsning, kan vi ikke konkludere, om den er den eneste løsning. Men vi ville kunne sige, at svaret 'ingen løsninger' ikke passer.

Hvis $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 3$ er en løsning, kan vi konkludere, at svarmulighed nummer 3 er den rigtige løsning. Så lad os vælge at indsætte disse værdier i ligningssystemet:

$$\begin{aligned} -1 - 2 \cdot 0_2 + 3 &= -1 + 0 + 3 = 2 \\ 2(-1) - \cdot 0 + 3 \cdot 3 &= -2 - 0 + 9 = 7 \\ -(-1) + 2 \cdot 0 &= 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Det vil sige, at svarmulighed 3 er det rigtige svar.

Bemærk: Hvis dette ikke var en løsning, så skulle vi have tjekket svarmulighed to. Ud fra dette tjek ville vi så kunne bestemme om svarmulighed 1 eller 2 var det rigtige svar.

Problem 2

Lad $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

a. Hvilken af vektorerne ligger ikke i W?

Opstil koefficientmatricen for spannet samt en vilkårlig vektor

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Da fås:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ -1 & 3 & -4 & c \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1 \to r_3]{r_2-2r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -3 & 3 & b-2a \\ 0 & 5 & -5 & c+a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{5}{3}r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -3 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5(b-2a)}{3}+c+a \end{bmatrix}$$

Vi ser, at $\mathbf{v}_3$ er lineært afhængig af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ (der er ingen pivotindgang i 3. søjle). Derudover ses det, at hvis en vilkårlig vektor *ikke* skal ligge i spannet af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, så skal der gælde, at sidste indgang i den sidste vektor ikke må være nul (hvis den er forskellig fra 0, så er der en pivot i sidste søjle, hvorfor denne vektor ikke vil ligge i spannet). Vi kan altså lave følgende opskrivning:

$$\frac{5(b-2a)}{3} + c + a \neq 0.$$

Denne kan reduceres ved at gange med 3 på begge sider:

$$5(b-2a) + 3c + 3a = 5b - 10a + 3c + 3a = -7a + 5b + 3c \neq 0.$$

Dermed kan vi let udregne for de givne vektorer (vi behøver ikke nulvektoren, den ligger i alle underrum pr. definition):

$$\begin{aligned} -7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 &= -21 + 15 + 6 = 0 \\ -7 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 &= -7 - 5 + 12 = 0 \\ -7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 &= -7 + 5 = 2 \\ -7 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 &= -35 + 20 + 15 = 0 \end{aligned}$$

Dermed er det altså kun

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

der ikke ligger i W.

b. Hvad er dimensionen af W?

Jamen vi ved, at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uafhængige, men $\mathbf{v}_3$ er lineært afhængig. Dermed er dimensionen 2.

Problem 3

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås $C = AB$.

a. Hvad er størrelsen af matrix C?

Da A er en 3×3-matrix og B er en 3×2-matrix fås:

$$(3 \times 3)(3 \times 2) = 3 \times 2.$$

b. Hvad er indgangen c_{21}?

Vi skal blot gange række 2 i A og søjle 1 i B sammen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 + 2 = 6.$$

Problem 4

Betragt følgende seks matricer:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. For hvilket i er A_i ikke en elementær matrix?

Vi har, at

$$I \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} A_1$$
$$I \xrightarrow[]{\substack{3r_2 \to r_2 \\ 3r_3 \to r_3}} A_2$$
$$I \xrightarrow{5r_1 \to r_1} A_3$$
$$I \xrightarrow{r_1 + r_2 \to r_1} A_4,$$

hvorfor det er klart, at A_2 ikke er en elementær matrix (der skal mere end 1 rækkeoperation til at nå fra identitetsmatricen til denne).

b. Hvor hvilket i er $A_i B = C$?

Vi ser, at

$$B \xrightarrow{r_1 + r_2 \to r_1} C,$$

hvilket stemmer over ens med rækkeoperationen for A_4. Dermed er $i = 4$.

Problem 5

En matrix er givet som

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvad er matricens determinant?

Svar:

Lad os udregne den ved at rækkereducere. Husk, at determinanten er uforandret, når en række lægges til eller trækkes fra en anden. Hvis der blot ganges med en skalar i en række, så skal determinanten ganges med skalarens inverse (dvs. divideres med skalaren). Ombyttes to rækker, skifter determinanten fortegn. Vi reducerer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - r_2 \to r_4]{r3 - 2r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har kun lavet en rækkeoperation, der ændrer determinanten, hvilken er at gange 2. række med $\frac{1}{2}$. Vi har (ved at betragte determinanten), at:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2)) = -4.$$

Husk, at determinanten af trekantsmatrix er alle diagonalindgangene ganget sammen.

Problem 6

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation med standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Hvad er værdien af n?

Da $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, betyder det, at transformationen T tager en vektor i $\mathbb{R}^n$ og giver et output i form af en vektor i $\mathbb{R}^m$. Vi skal altså finde ud af dimensionen af v, således Av er veldefineret. Men da A har 5 søjler, da skal v have 5 rækker. Dermed er $n = 5$.

b. Hvad er værdien af m?

Igen, vi skal blot finde ud af, hvor mange indgange en vektor har, når vi har ganget startvektoren på. Men dette antal afhænger udelukkende af antallet af rækker i A, hvilket er 3. Dermed er $m = 3$.

c. Er T injektiv (en-til-en)?

Den eneste måde, at T er injektiv på, er, hvis nulrummet har dimension 0. Dette svarer dog til at sige, at der skal være pivotindgange i alle søjler. Men da der er flere søjler, end der er rækker, kan der ikke være pivot i alle søjler. Dermed kan T ikke være injektiv.

d. Er T surjektiv (på)?

Vi skal tjekke, om der er pivot i alle rækker. Vi har:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der er altså ikke pivot i alle rækker, hvorfor T heller ikke er surjektiv.

e. Findes der to vektorer u og v således, at $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$?

Ja, da T ikke er injektiv. En lineær afbildning er injektiv, hvis der IKKE kan findes to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ således, at $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Men vi afgjorde i opgave c, at T ikke er injektiv, hvorfor vi altså kan finde sådanne vektorer. Helt specifikt er det fordi, at nulrummet har dimension større end 0 (der er ikke pivot i alle søjler), hvorfor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ikke kun har $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Problem 7

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hvad er dens egenværdier?

Svar:

Det er let nok at spotte. Ellers er udelukkelsesmetoden også hurtig. Men lad os tage den gode gamle metode.[1]

Vi skal løse $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi har altså:

$$\det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -8 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (-5-\lambda)(7-\lambda) - 4 \cdot (-8) = -35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 32 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Vi finder diskriminanten til dette andengradspolynomium:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$$

Dermed er

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} .$$

[1] Der vil altid være egenværdier, hvis man medtager komplekse egenværdier. Men det er ikke alle, der har Calculus før Lineær Algebra - hvorfor man udelukkende beskæftiger sig med reelle mængder i dette kursus.

Problem 8

En matrix og en vektor er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 8 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a. Vektoren v er en egenvektor til A. Hvad er den tilhørende egenværdi?

Definitionen af egenvektorer og deres egenværdier fremgår af ligheden $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vi skal blot finde det λ, der opfylder dette krav. Vi ser altså:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 8 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 1 - 6\cdot 1 + 8\cdot 1 \\ -4\cdot 1 - 3\cdot 1 + 8\cdot 1 \\ -4\cdot 1 - 6\cdot 1 + 11\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-6+8 \\ -4-3+8 \\ -4-6+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{v}.$$

Altså er egenværdien 1.

b. Det oplyses, at $\lambda = 3$ er en egenværdi for A. Hvad er dimensionen af det tilhørende egenrum?

Vi betragter:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1-3 & -6 & 8 \\ -4 & -3-3 & 8 \\ -4 & -6 & 11-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 8 \\ -4 & -6 & 8 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da der er 2 frie variable (2 søjler uden pivot) for $A - 3I$, er dimensionen af det tilhørende egenrum ligeledes 2.

c. Er A diagonaliserbar?

Ja. Da A er en 3×3-matrix, er der 3 egenværdier med multiplicitet. Hvis en egenværdi kun har multiplicitet 1, kan der ikke være problemer der, da egenrummet også har 1 dimension. Problemet kan ligge i multiplicitet større end 1. Men vi har lige konstateret i opgave b, at egenværdien 3 har et egenrum med dimension 2. Dermed skal egenværdien 3 altså som minimum have multiplicitet 2. Den kan heller ikke have mere end 2, da den tredje egenværdi er redegjort for ved egenværdien 1. Dermed har vi samlet set samme dimensioner af egenrummene, som vi har multiplicitet af det samlede antal egenværdier, hvilket er kravet for, at en matrix er diagonaliserbar.

d. Hvad er determinanten af A?

Så vi ved, at A er diagonaliserbar. Det betyder, at A kan skrives som $A = PDP^{-1}$, hvor P er en matrix med egenvektorer i søjlerne, og D er en diagonalmatrix med de tilhørende egenværdier på diagonalen. Vi har altså:

$$\det A = \det(PDF^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \frac{\det(P)}{\det(P)}\det(D),$$

men $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, hvormed $\det(A) = \det(D) = 1 \cdot 3^2 = 9$.

Problem 9

Tre vektorer er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

og et underrum er defineret som $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

a. Er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortonormal mængde?

Vi skal blotte prikke vektorerne i denne mængde og se, om disse giver 0, samt tjekke om hver af disse vektorer har længde 1. Vi har:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = 0.$$

Da vektorproduktet giver 0 for alle (begge) vektorerne imellem i mængden, er disse alle (begge) ortogonale på hinanden. Mængden er da en ortogonal mængde. Vi tjekker ortonormalitet ved at finde længden[2]:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1.$$

og

$$\|\mathbf{v}_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1.$$

Altså er de ortogonale og har begge længde 1. Der for er dette en ortonormal mængde.

b. Hvad er dimensionen af W?

Da W er udspændt af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, og disse er ortogonale (og dermed lineært uafhængige), har W en dimension på 2.

c. Hvad er dimensionen af $W^\perp$?

Da $W \subseteq \mathbb{R}^4$ og $\dim W = 2$, får vi, at $\dim W^\perp = 4 - 2 = 2$.

d. Hvad er den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W?

Vi anvender formlen

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2.$$

[2] Hvis du ikke forstår min måde at udregne længden på, så tjek eventuelt Kapitel 4 i mine noter om "Matematisk takt og tone".

Vi bemærker dog først, at længden af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er 1:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2}2 = 1.$$

Samme udregning kan laves for $\mathbf{v}_2$, da vektornormer er ligeglade med fortegnet af indgangene (pga. kvadrerede udtryk). Vores formel er altså reduceret til:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}_2.$$

Prikprodukterne er givet ved:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5) = \frac{-4}{2} = -2.$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5) = \frac{8}{2} = 4.$$

Dermed fås:

$$\mathbf{w} = -2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 = -2\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

e. Hvad er afstanden fra u til W?

Da $\mathbf{w}$ ligger i W og er projektionen af $\mathbf{u}$ ned på W, skal vi blot udregne længden af forskellen mellem disse to. Vi har:

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (-1-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4+4+4} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{4^2} = 4.$$

Problem 10

Lad

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Find den kombination, som gør Q til en ortogonal matrix.

Svar:

En ortogonal matrix består som bekendt af vektorer med længde 1. Vi ser, at den sidste vektor i matricen kun har én ikke-nul indgang, hvilken er c - vi skal dog huske at gange $1/\sqrt{2}$ ind, så der står reelt $c/\sqrt{2}$. Vi skal reelt bare finde det c, således at længden af vektoren bliver 1. Vi har altså:

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}.$$

Vi ser, at de eneste muligheder, der er tilbage, er $a = 1$ og $b = 2$, eller $a = -1$ og $b = 1$. Det er værd at bemærke, at -1 og 1 har lige stor indflydelse på længden. Det vil sige, at forskellen i længderne ligger ved b-værdierne. Vi ser dog, at første søjle i Q indeholder to 1-taller. Det betyder, at hvis $a = 1$ eller $a = -1$, så skal b også være 1 eller -1. Dermed er $a = -1,\ b = 1,\ c = \sqrt{2}$ svaret.

Problem 11

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basen for $\mathbb{R}^2$ med $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lad desuden $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineær transformation. Matrix repræsentationen af T relativt til basen $\mathcal{B}$ er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvad er standard matricen for T?

Svar:

Vi benytter formlen

$$A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}.$$

Vi har, at $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi kan hurtigt finde den inverse $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi har altså:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problem 12

En liste af vektorerne er givet ved:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix}0\\3\\1\\4\end{bmatrix}.$$

a. Hvilken af de følgende mængder er lineært uafhængige?

Du må gerne opstille samtlige matricer, rækkereducere dem og konkludere (u)afhængighed på baggrund af pivotsøjler. Men du må også gerne gøre som jeg:

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Vi kan hurtigt se, at vektorerne er lineært uafhængige, da de hver har ikke-nul indgange et sted, hvor den anden har en nul indgang.

$\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

Vi ser, at $\mathbf{v}_2$ har en nul-indgang i 4. komponent, hvor $\mathbf{v}_3$ har et ikke-nul komponent. De er altså lineært uafhængige.

$\{\mathbf{v}_5\}$

Well... Det er en vektor. Så selvfølgelig er det en lineært uafhængig mængde.

$\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Vi ved, at $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uafhængige. Derudover kan vi se, at $\mathbf{v}_4$ også har en nul-indgang ved 4. komponent. Derfor kan $\mathbf{v}_3$ ikke bruges til noget i en linear kombination, hvor $\mathbf{v}_4$ skal beskrives. Kan $\mathbf{v}_2$ beskrive $\mathbf{v}_4$ for sig selv? Nej, for $\mathbf{v}_2$ kan ikke lave et 0 i 2. komponent uden at lave et 0 i første komponent. Altså er mængden lineært uafhængig.

$\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

Denne er lidt mere uoverskuelig, men det er dog stadig let at se, at $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_6$. Dermed er disse lineært afhængige.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

Vektorerne befinder sig i $\mathbb{R}^4$. Dermed kan vi konkludere, at dette er en lineært afhængig mængde, da der maksimalt kan være 4 lineært uafhængige vektorer i en mængde, hvor vektorerne ligger i $\mathbb{R}^4$.

b. Hvilke af følgende mængder udspænder $\mathbb{R}^4$?

Okay. For at en mængde skal udspænde $\mathbb{R}^4$, skal der som minimum være 4 vektorer i mængden. Derfor gider jeg ikke inkludere dem med færre.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Vi ved fra opgave a, at $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ udgør en lineært uafhængig mængde. Hvad disse tre vektorer har til fælles er, at deres 3. komponent er et 0. Men hov! $\mathbf{v}_1$ har en ikke-nul indgang i 3. komponent. Dermed kan disse tre vektorer ikke beskrive $\mathbf{v}_1$ og denne vektor kan ikke hjælpe med at beskrive de andre. Dermed er denne mængde lineært uafhængig, hvorfor den udspænder $\mathbb{R}^4$.

$\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

Det kan gøre være, at denne mængde har 4 vektorer, men vi konkluderede, at $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5$ og $\mathbf{v}_6$ var lineært afhængige i opgave a. Derfor kan mængden maksimalt udspænde 3 dimensioner af de i alt 4, som $\mathbb{R}^4$ har. Altså udspænder denne mængde IKKE $\mathbb{R}^4$.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

Da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ udspændte $\mathbb{R}^4$ og

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\},$$

udspænder denne altså også hele $\mathbb{R}^4$.

Problem 13

Lad A og B være 4×4-matricer med $\det(A) = -2$ og $\det(B) = 5$.

a. Hvad er $\det(A^3)$?

Vi har:

$$\det(A^3) = \det(A * A * A) = \det(A)\det(A)\det(A) = \det(A)^3 = (-2)^3 = -8.$$

b. Hvad er $\det(A^\top B^{-1})$?

Vi har:

$$\det(A^\top B^{-1}) = \det(A^\top)\det(B^{-1}) = \det(A)\frac{1}{\det(B)} = -\frac{2}{5}.$$

c. Hvad er $\det(2B)$?

Vi skal her huske på, at B er en 4×4-matrix, da 2-tallet er ganget ind på alle indgange (og dermed alle rækker.[3]):

$$\det(2B) = 2^4 \det(B) = 16\det(B) = (10 + 6)5 = 50 + 30 = 80.$$

[3]Prøv at find determinanten af identitetsmatricen, hvor I gør dette, hvis I er forvirret over, hvorfor

Problem 14

Et underrum af $\mathbb{R}^4$ er givet som $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 2 \\ 26 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Man vil gerne finde en basis for W og bruger MATLABs Command Window som følger:

```
» A = [ 2 4 1 1 19 2; -1 -2 1 4 -2 3; 1 2 -1 -4 2 1; 3 6 1 0 26 9];
» rref(A)

ans =
1 2 0 -1 7 0
0 0 1  3 5 0
0 0 0  0 0 1
0 0 0  0 0 0
```

Hvilken mængden udgør en basis for W?

Svar:

Vi ser, at første, tredje og sjette søjle er pivotsøjler. Dermed er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6\}$ en basis for W.

Problem 15

Den lineære transformation

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

beskriver en spejling i en akse gennem Origo. Hvilken af vektorerne ligger på spejlingsaksen.

Svar:

Hvis vi smider en vektor ind, der ligger på spejlingsaksen, vil denne ikke blive påvirket. Vi har:

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -12+25 \\ 5+60 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 \\ 65 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 \\ 5\cdot 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Hey se der, vi fandt vektoren (jeg læser "Hvilken af vektorerne ligger på spejlingsaksen"som, at der kun er ét svar), der ikke er påvirket af spejlingen. Altså må denne vektor ligge på spejlingsaksen.