Besvarelser til Lineær Algebra
Ordinær eksamen - 6. Juni 2016

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3 \;\; \mathbf{a}_4]$ være en matrix med 3 rækker, og lad $B = [\mathbf{b}_1 \;\; \mathbf{b}_2 \;\; \mathbf{b}_3]$ være sådan, at $C = AB$ er defineret.

Hvor mange rækker har matricen B?

Efersom A har 3 rækker og 4 søjler, er A en 3×4-matrix. B har 3 søjler. Vi skal altså have, at størrelsen af $AB = (3 \times 4)(m \times 3)$, hvor m er antallet af rækker i B, er defineret. Derfor skal m være 4 før dimensionerne passer.

Hvor mange rækker har matricen C?

Eftersom $C = AB$, hvor A står yderst til venstre, så vil C have samme antal rækker som A, altså 3.

Hvordan kan anden søjle i C bestemmes?

Da søjlenummeret i $C = AB$ er bestemt af søjlenummeret i matricen yderst til højre, B, kan vi blot gange anden søjle i B, $\mathbf{b}_2$, på A, hvorfor $c_2 = A\mathbf{b}_2$.

Problem 2

Lad A være en $3 \times n$ matrix, og lad E være elementærmatricen givet ved

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hvordan fremkommer matricen EA fra A?

Svar:

Den letteste måde at se dette på, hvis man har lidt problemer, er ved at betragte $A = I_3$. Vi har selvfølgelig $EA = EI_2 = E$. Vi skriver på fuld form:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fra venstre til højre er der sket det, at der er blevet lagt 2 gange række 3 til række 2. Dvs. vi skal *"addere 2 gange række 3 til række 2"*.

Problem 3

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Det oplyses om matricen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ har følgende reducerede række echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1a) Søjle 1 er pivot-søjle i A.

Sandt, da der er en pivot-indgang i første søjle!

1b) Søjle 2 er pivot-søjle i A.

Sandt, da der er pivot-indgang i anden søjle.

1c) Søjle 3 er pivot-søjle i A.

Falsk, da der ikke er pivot-indgang i tredje søjle.

1d) Søjle 4 er pivot-søjle i A.

Sandt - jeg tror, I har fattet hvorfor.

2. Hvad er nulliteten af A?

Det er antallet af ikke-pivot-søjler i A. Husk på, at den sidste række i den reducerede række echelon form ikke tilhører A, men blot er $\mathbf{b}$. Derfor er nulliteten af A lig med 1.

3. Lad x være en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hvad er x_4?

Vi aflæser i den matrix, der er på den reducerede række echelon form, at $\mathbf{x}_4 = 2$. (Vi finder 4. søjle, da denne er en pivot-indgang, og så kigger vi yderst til højre for at aflæse værdien).

4a) Enhver løsning x til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ opfylder $x_1 = x_3$.

Sandt, da første række i matricen på den reducerede række echelon form indikerer, at $x_1 - x_3 = 0$, hvorfor $x_1 = x_3$.

4b) Løsningsmængden til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er et underrum af $\mathbb{R}^4$.

Falsk, så længe sidste søjle ikke er nul-vektoren, kan dette ikke lade sig gøre. Et af kravene for et underrum er, at vi skal kunne gange en konstant på en vilkårlig løsningsvektor, og så vil denne ligge i underrummet. Lad $\mathbf{x}$ være løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{b}$ ikke er nulvektoren. Og lad $c \in \mathbb{R}$ være vilkårligt (skal det være for at opfylde underrumskriterierne). Vi har $A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c\mathbf{b} \neq \mathbf{b}$. Altså kan $c\mathbf{x}$ ikke være en løsning for et vilkårligt c, når $\mathbf{b}$ ikke er nulvektoren.

Problem 4

Lad $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\1 & 2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$,
og lad $Q = [\mathbf{q}_1 \;\; \mathbf{q}_2 \;\; \mathbf{q}_3 \;\; \mathbf{q}_4]$.
Man kan se, at $\mathcal{B} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$.

1a) Q er en ortogonal matrix.

Sandt, da Q er sammensat af 4 ortonormale vektorer, der udgør en basis for $\mathbb{R}^4$.

1b) Q er en symmetrisk matrix.

Vi har

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow Q^\top = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} = Q.$$

Altså er dette sandt.

1c) $Q^{-1} = -Q$.

Falsk. Da Q er en ortogonal matrix er $Q^{-1} = Q^\top$. Vi ved desuden, at Q er symmetrisk, hvorfor $Q = Q^\top$. Altså er $Q^{-1} = Q$, hvormed spørgsmålet lyder:

$$Q^{-1} = -Q \Leftrightarrow Q = -Q \Leftrightarrow Q + Q = 2Q = \mathbf{0}.$$

Den eneste måde, at en matrix ganget med 2 kan give en matrix bestående af nuller, er, hvis matricen i forvejen var en matrix bestående af 0'er. Altså falsk.

1d) $Q^{-1} = Q$.

Sandt - se svar i 1c.

2. Hvad er determinanten af Q?

Der er her givet en række tal. Da determinanten af en ortogonal matrix kun kan være 1 eller -1 går denne opgave blot ud på at spotte den af dem, der er en mulighed. I dette tilfælde er determinanten -1.

T betegner nu den lineære operator med standardmatrix A. Lad $C = [T]_\mathcal{B}$ være matrixrepræsentationen af

Der er to umiddelbare metoder til denne opgave. En slideopgave og en tænkeopgave. Begge to involverer formlen (husk fra opgave 1d, at $Q^{-1} = Q$):

$$C = Q^{-1}AQ = QAQ.$$

Første metode

Jeg har lyst til at regne.

Vi ved, at $C = QAQ$, og hvis vi vil have første række og første søjle af C, så skal vi blot vælge første række i første matrix i multiplikationen, samt første søjle i sidste matrix i multiplikationen. Kort sagt, kan vi finde $c_{11} = \mathbf{q}_1^\top A\mathbf{q}_1$. Vi får:

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\\
c_{11} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\\
= c_{11} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+1-1+0\\ 1+2+0-1\\ -1+0+2+1\\ 0-1+1+2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}(2+2+2+2)\\
&= \frac{1}{4}(4\cdot 2)\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Anden metode

Jeg har ikke lyst til at regne mere, så giv mig lidt teori.

Vi ved, at A er symmetrisk. Derfor kan vi skrive $A = PDP^{-1}$, hvor P er en matrix bestående af egenvektorer, og D er en diagonalmatrix med de dertilhørende egenværdier. Omskrivning giver:

$$AP = PD.$$

Betragtes kun første søjle af P svarer dette til:

$$A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 D = \lambda_1\mathbf{p}_1,$$

hvor λ_1 er en skalar, som selvfølgelig er egenværdien til $\mathbf{p}_1$.
"JAMEN MIKKEL!?!? HVAD BETYDER DET?!?!"
Jo nu skal du høre min lille mus. Det betyder, at vi faktisk ikke behøver, at verificere, at $Q = P$ (dvs. alle søjler i Q er egenvektorer til A). Vi behøver kun at tjekke, om $\mathbf{q}_1$ (da denne er først i Q) er en egenvektor til A. Er dette tilfældet, så er den tilhørende

egenværdi også værdien i c_{11}, eftersom C svarer til D så.

$$A\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2+1-1+0 \\ 1+2+0-1 \\ -1+0+2+1 \\ 0-1+1+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{q}_1.$$

Altså er $\mathbf{q}_1$ en egenvektor med egenværdien 2, hvorfor 2 er værdien i c_{11}.

Problem 5

Det karakteristiske polynomium af

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

er $t(t-2)(t+2)(t-4)$.

1. Hvilken af tallene 1, 4, -4 eller 16 er en egenværdi for A?

Man finder egenværdierne ved at se på, hvilke værdier af t, der får det karakteristiske polynomium til at blive 0. Dvs.

$$t(t-2)(t+2)(t-4) = 0.$$

Hvis vi sætter t=4, så bliver den sidste parentes til 0, og så er det ligegyldigt, hvad resten af parenteserne giver, da 0 ganget alt andet er 0. Altså er 4 en egenværdi.

2. Hvilken af følgende er en egenvektor for A?

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi skal blot gange vektorerne på og se, om vi får samme vektor ud bare ganget med en konstant, altså $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{v}$ er en af ovenstående vektorer.

Bemærk dog, at $\mathbf{0}$ per definition aldrig kan være en egenvektor (et ondt tricks-pørgsmål), så denne ses der bort fra.

For **a** haves

$$A\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 - 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ -1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+0-2 \\ 0+2-1+0 \\ 0-2+1+4 \\ 0+0+2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \lambda\mathbf{a}$$

Vi kan simpelthen ikke finde en skalar λ, så $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$.

For **b** haves

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot(-1) - 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2+0-1 \\ 2-1+1+0 \\ 0+1-1+2 \\ -1+0-2+1 \end{bmatrix} =$$

Altså er $A\mathbf{b} = 2\mathbf{b}$, hvorfor **b** er en egenvektor med egenværdi 2. Der er kun én løsning til hver opgave, hvorfor vi stopper her.

3. Kan A diagonaliseres?

Eftersom der kun er forskellige egenværdier, så kan A diagonaliseres.

4. Har A en invers matrix?

Nej, eftersom 0 er en egenværdi, da $t = 0$ får $t(t-2)(t+2)(t-4) = 0$.

Problem 6

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og lad $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{w}$ være ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på W.

1. Er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale?

Vi skal blot tjekke, om prikproduktet er 0.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 0 + 4 - 4 + 0 = 0.$$

Da prikproduktet er 0, er de ortogonale.

2. Hvad er 2. komponenten af w (dvs. w_2)?

Vi skal bruge formlen:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2.$$

Da det kun er andenkomponenten i $\mathbf{w}$, der betragtes, kan vi også blot betragte andenkomponenten i både $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, der ikke står på brøken. Lad os først udregne prikprodukterne samt længderne kvadreret:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 = 3\cdot1+3\cdot2+0\cdot2+3\cdot0 = 3+6+0+0 = 9, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2 = 3\cdot0+3\cdot2+0\cdot(-2)+3\cdot1 = 0+6+0+3 = 9,$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2}^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 1 + 4 + 4 = 9,$$

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2}^2 = 0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 1 + 4 + 4 = 9.$$

Vi får altså, at

$$w_2 = \frac{9}{9}2 + \frac{9}{9}2 = 2 + 2 = 4.$$

3. Lad z være ortogonale projektionen af u på $W^\perp$. Hvad er 2. komponenten af z (dvs. z_2)?

Vi har, at $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$, hvorfor $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, hvilket igen betyder, at $z_2 = u_2 - w_2$. Vi har altså:

$$z_2 = 3 - 4 = -1.$$

4. Hvad er dimensionen af $W^\perp$?

Da W er udspændt af 2 uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Så er $\dim(W) = 2$. Da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, samt $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$, har vi:

$$\dim(W^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(W) = 4 - 2 = 2.$$

Problem 7

Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Er A en rotationsmatrix? I så fald hvilken?

Svar:

Rotationsmatricen er givet ved

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Dette betyder, at $\cos\theta = 0$. Dette er kun $90°$ og $270°$, der opfylder dette. Derudover skal der gælde, at $\sin\theta = 1$. Dette gælder kun for $\theta = 90°$. Vi har med $\theta = 90°$:

$$\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Problem 8

Lad $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Lad $C = AB$. Hvad er tallet c_{23}? Vi kan blot vælge at betragte 2. række i A samt 3. søjle i B. Vi har:

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2 - 1 + 9 = 10.$$

Problem 9

Lad A og B være 5×5-matricer med $\det A = 3$ og $\det B = 2$.

1. Hvad er $\det(-2A)$?

Da A er en 5×5-matrix, har vi:

$$\det(-2A) = (-2)^5 \det A = -32 \cdot 3 = -96.$$

2. Hvad er $\det AB^\top$?

Vi kan splitte determinanten ad i produkter. Vi har:

$$\det(AB^\top) = \det A \det B^\top = \det A \det B = 3 \cdot 2 = 6.$$

3. Hvad er $\det AB^{-1}$?

Vi bruger egenskaberne for determinanten:

$$\det AB^{-1} = \det A \det B^{-1} = \det A (\det B)^{-1} = \frac{\det A}{\det B} = \frac{3}{2}.$$

Problem 10

Lad $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Hvad er determinanten af A?

Svar:

Vi benytter reduktion af matricen. Vi husker, at vi gerne må lægge et multiplum af en række til en af de andre uden, at der sker noget. Hvis vi bytter rundt på to rækker, skal determinanten ganges med -1. Ganges en række med et tal k, skal determinanten ganges med $1/k$. Vi har:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} = -1 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1(-1 \cdot 5 \cdot 1) = 5.$$

Hvor vi husker, at determinanten af en trekantsmatrix blot er alle diagonalindgangene ganget sammen.

Problem 11

$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineær transformation med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses, at A med elementære rækkeoperationer kan omskrives til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er værdien af n?

n er antallet af søjler i matricen, hvilket er 6.

2. Hvad er væriden af m?

m er antallet af rækker i matricen, hvilket er 3.

3. Hvad er rangen af A?

Dette er antallet af pivotindgange i A. Vi ser fra omskrivningen af A, at søjle 1, 2 og 3 er pivotsøjler. Altså er rangen af A 3.

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af T?

Dette er antallet af ikke-pivot-søjler, hvilket er de resterende 3. Altså er nulrummets dimension 3.

5. Er T entydig (en-til-en, injektiv)?

Nej, fordi nulrummet er ikke 0-dimensionelt. Det vil sige, at flere vektorer end nulvektoren kan blivet afbilledet over i nulvektoren.

6. Er T på (surjektiv)?

Ja, da der er pivotindgange i alle rækker.

Problem 12

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

1. Er b i $\operatorname{Col} A$?

Vi skal se, om denne kan skrives som en linearkombination af vektorerne i A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 & 2 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ 3 & -4 & 9 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & -6 & 1 \\ 0 & 14 & -12 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ligningssystemet er konsistent, hvilket betyder, at **b** ligger i $\operatorname{Col} A$.

2. Er b indeholdt i $\operatorname{Null} A$?

Vi finder

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-6) \cdot 5 + 7 \cdot 8 \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 30 + 56 \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

Vi ser, at den resulterende vektor ikke er nul-vektoren (derfor jeg kun har udregnet den ene indgang). Dermed er **b** ikke i $\operatorname{Null} A$.

3. Er b indeholdt i $(\operatorname{Row} A)^\perp$

$(\operatorname{Row} A)^\perp$ er det samme som $\operatorname{Null} A$. Altså nej.

Problem 13

Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Vi opstiller matricen for dette ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denne har altså uendeligt mange løsninger, da der er en nulrække og dermed en fri variabel. Bemærk desuden, at en et lineær ligningssystem aldrig kan have mulighed for 2 løsninger.

Problem 14

$T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ er en lineær transformation.

1. Hvad er den mindst mulige dimension af nulrummet af T?

Der kan være $\min(5, 3) = 3$ pivot-søjler i T, hvorfor nulrummet mindst kan være $5 - 3 = 2$.

2. Hvad er den størst mulige dimension af nulrummet af T?

Hvis vi betragter nulmatricen, så vil alle vektorer resultere i nulvektoren. Altså er den størst mulige dimension af nulrummet af T lig 5, da dette er antallet af søjler.

Problem 15

I MATLABs Command Window er der indtastet følgende matrix:
`» A = [1 1 1; 1 1 2; 1 2 2];`
Det oplyses, at A har en invers matrix `B`. Hvilken kommando bruges til at bestemme den korrekte inverse af `A`?

Svar:

Vi skal lave en matrix:

$$[A|I_3],$$

hvor denne skal rækkereduceres til reduceret echelon form. Det sker ved:
`C=rref([A eye(3)])`.
Når $[A|I_3]$ er rækkereduceret til reduceret echelon form vil A^{-1} være på pladsen, hvor I_3 startede, hvilket vil sige de 3 sidste søjler (ergo søjle 4, 5 og 6). Disse tre søjler tages ud fra C med kommandoen:
`B=C(:,4:6)`.