Besvarelser til Lineær Algebra
Ordinær Eksamen - 12. Juni 2017

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1 **3**

Problem 2 **4**

Problem 3 **7**

Problem 4 **9**

Problem 5 **10**

Problem 6 **11**

Problem 7 **12**

Problem 8 **13**

Problem 9 **14**

Problem 10 **16**

Problem 11 **19**

Problem 12 **20**

Problem 13 **21**

Problem 14 **22**

Problem 1

Hvilke udsagn om ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 15 \end{aligned}$$

er sande?

$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -5$ løser systemet.

Vi opstiller koefficientmatricen for ligningssystemet og ganger vektoren $[x_1, x_2, x_3]^\top = [2, -1, -5]$ på. Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 7 - 5 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2 + 5 \\ 4 + 1 - 5 \\ 2 - 7 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Dermed giver $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -5$ lige præcis højresiden i ligningsystemet, hvorfor denne er en løsning.

$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1$ løser systemet.

Vi opstiller koefficientmatricen for ligningssystemet og ganger vektoren $[x_1, x_2, x_3]^\top = [2, 2, 1]$ på. Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 4 - 1 \\ 4 - 2 + 1 \\ 2 + 14 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Dette svarer ikke til højresiden, hvorfor denne ikke er en løsning.

Systemet har $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -5$ som den eneste løsning.

Vi opstiller totalmatricen for ligningssystemet og rækkereducerer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -10 \\ 0 & 5 & -3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da matricen er konsistent, og der ikke er pivot i alle de tre første søjler, er der altså uendeligt mange løsninger. Derfor er dette ikke korrekt!

Problem 2

I opgaven undersøges matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvilke af de følgende påstande er sande?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Null} A.$$

Vi ganger blot $\mathbf{u}$ på A fra højre og ser, om vi får 0-vektoren:

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1-1 \\ -1+2-1 \\ -1-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Altså får vi nul-vektoren, når $\mathbf{u}$ ganges på A, hvorfor $\mathbf{u}$ altså må ligge i nulrummet.
- Påstanden er korrekt.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \textbf{ er en egenvektor for } A.$$

Vi husker, at $\mathbf{v}$ er en egenværdi for A, hvis der eksisterer et tal, λ, sådan at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vi ganger altså blot $\mathbf{v}$ på A. Vi har:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1+1 \\ 0+2+1 \\ 0-1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}.$$

Altså er $\mathbf{v}$ en egenvektor med egenværdien 3.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \textbf{ er en egenvektor for } A.$$

Vi husker, at $\mathbf{w}$ er en egenværdi for A, hvis der eksisterer et tal, λ, sådan at

$$A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}.$$

Vi ganger altså blot $\mathbf{w}$ på A. Vi har:

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1+1 \\ -2-2+1 \\ -2+1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{w}.$$

Altså er $\mathbf{w}$ en egenvektor med egenværdien 3.

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ har samme tilhørende egenværdi.

Ja.....

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært afhængige.

Nej, da vi ikke kan finde en konstant $k \neq 0$, sådan at

$$\mathbf{v} = k\mathbf{w}.$$

Det ville betyde, hvis vi betragter førstekoordinaten for $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, at $0 = k \cdot 2$, hvilket ikke er muligt, når $k \neq 0$.

A er invertibel (regulær).

Vi ser, om vi kan få pivot i alle søjler (og rækker):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der er altså ikke pivot i alle søjler (og rækker), hvorfor A altså ikke er invertibel.

A er diagonaliserbar.

Yes sir! Hvorfor? Jo, en matrix er diagonaliserbar, når der kan findes lige så mange lineært uafhængige egenvektorer til en egenværdi, som egenværdien har multiplicitet.

Matricen A er en 3×3-matrix. Det vil sige, at denne kun kan have 3 egenværdier multiplicitet inkluderet. Vi ved allerede, at der er to lineært uafhængige egenvektorer med egenværdien 3. Det vil sige, at denne egenværdi udgør mindst to af de tre mulige egenværdier.

Vi er altid sikret, at der findes mindst en lineært uafhængig egenvektor til hver egenværdi - uanset multipliciteten. Der kan ikke være flere lineært uafhængige egenvektorer, end der er multiplicitet. Det vil sige, hvis den sidste egenværdi er forskellig fra 3, så må A være diagonaliserbar.

Vi er heldige, vi har lige vist, at A ikke er invertibel, hvorfor A altså må have egenværdien 0. Dermed har vi 2 lineært uafhængige egenvektorer for egenværdien 3 (som har multiplicitet 2) samt en lineært uafhængig vektor for egenværdien 0 (som har multiplicitet 1). Dermed er A diagonaliserbar.

Der findes netop én diagonalmatrix D, som er similær med A.

At D er similær med A betyder, at

$$P^{-1}AP = D \qquad \text{eller} \qquad A = PDP^{-1}.$$

Vi ved, at A er diagonaliserbar, hvilket betyder netop, at vi kan finde en sådan matrix D. Der findes dog kun én, hvis egenværdierne alle er den samme, hvilket ikke er tilfældet. Det eneste krav ved diagonalisering er, at egenværdierne skal stå på diagonalen - ikke hvilken rækkefølge. Dermed vil forskellige egenværdier resultere i et valg af, hvor på diagonalen egenværdierne skal placere, hvilket er tilfældet for os.

Vi har altså ikke KUN én diagonalmatrix, som er similær med A. Vi har tre forskellige i vores tilfælde.

Problem 3

A er en $m \times n$-matrix, B er en 2×3-matrix, $C = AB$ er en 3×3-matrix.

1. Hvilke værdier antager m og n?

For at AB er en gyldig multiplikation skal n være 2. Ellers stemmer dimensionerne ikke over ens. For at resultatet skal være en 3×3-matrix har vi:

$$(m \times 2)(2 \times 3) = m \times 3,$$

hvilket betyder, at m skal være 3.

2. A er standardmatricen for en lineær transformation $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, B er standardmatricen for en lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, og C er standardmatricen for en lineær transformation $U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Hvilke af følgende udsagn kan umuligt være sande?

a. S er på (surjektiv)?

A er en 3×2-matrix, og for at S er surjektiv kræves det, at der er pivot i alle rækkerne i A. Dette ER UMULIGT, da der maksimalt kan være det antallet af rækker eller søjler, afhængig af hvilken af disse, der er mindst. I dette tilfælde er antallet af søjler (2) mindre end antallet af rækker (3), hvorfor vi altså ikke kan have mere end 2 pivotindgange, og derfor kan S ikke være surjektiv.

a. S er en-til-en (injektiv).

For at S er injektiv (dvs. A er injektiv), skal A have pivot i alle søjler. Dette kan vi ikke udelukke, da der er færre søjler end rækker.

b. T er på (surjektiv).

Vi ved, at B er en 2×3-matrix. Da der er færre rækker en søjler, er det muligt, at der er pivotindgange i alle rækker, hvorfor vi ikke kan afvise, at T er surjektiv.

b. T er en-til-en (injektiv).

Vi ved, at der er flere søjler end rækker, hvorfor vi ikke kan have pivotindgange i alle søjlerne. Dette betyder, at T ikke kan være injektiv.

c. U er på (surjektiv) og/eller en-til-en (injektiv).

Jeg har slået disse sammen for at prøve at komme eventuel forvirring til livs.

Surjektiv er egenskaben at 'sende' (afbillede) vektorer fra et domæne og så ramme hele kodomænet.
Injektiv er egenskaben, at KUN ens vektorer bliver 'sendt' (afbilledet) til samme

vektor. For lineære afbildninger må det altså gælde, at det KUN er nulvektoren, der ganget på et matrix giver nulvektoren.

I det næste stykke skal vi huske, at $C = AB$.

Vi ved, at B ikke kan være injektiv. Det vil sige, at flere vektorer bliver afbilledet til 0-vektoren. Lad v være i nulrummet af B:

$$C\mathbf{v} = AB\mathbf{v} = A(B\mathbf{v}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Derfor kan AB ikke være injektiv, når B ikke er injektiv.

Vi ved, at A ikke kan være surjektiv. Det betyder, at vi uanset vektorerne i domænet IKKE kan ramme HELE kodomænet.

Generelt set, så kan vi ikke opfylde nogen af de egenskaber, hvis ikke de besidder samme egenskaber.

Problem 4

Opgaven tager udgangspunkt i matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ samt vektorerne $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. Er d indeholdt i søjlerummet $\operatorname{Col} A$?

Nej, da vektorerne i søjlerummet kun er i 3 dimensioner, hvor **d** er i 4 dimensioner.

2. Er b indeholdt i søjlerummet $\operatorname{Col} A$?

Vi smækker vektoren **b** i slutningen af A og rækkereducerer. Vi har:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da sidste søjle ikke er en pivotsøjle, kan vi konkludere, at **b** er indeholdt i $\operatorname{Col} A$.

3. Er d indeholdt i nulrummet $\operatorname{Null} A$?

Vi ganger **d** på fra venstre:

$$A\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 - 1\cdot 5 + 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 4\cdot 0 \\ 2\cdot(-1) - 1\cdot 3 + 1\cdot 5 + 2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+6-5+0 \\ -3+3+0+0 \\ -2-3+5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får altså nulvektoren ud, hvorfor **d** må ligge i nulrummet af A.

4. Er c indeholdt i nulrummet $\operatorname{Null} A$?

Vi ganger **c** på fra venstre:

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2-1-3 \\ 3-1+0-4 \\ 2+1+1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi får altså IKKE nulvektoren, hvorfor **c** ikke ligger i nulrummet af A.

Problem 5

En lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilken værdi har tallet n?

Når man har $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, så er n antallet af dimension, der vektorer, man ganger på matricen A fra højre. Det vil sige antallet af søjler, og dermed er $n = 3$.

2. Hvilken værdi har tallet m?

Når man har $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, så er m den resulterende vektor, når man ganger en vektor på fra højre. Det vil altså sige, at m er antallet af rækker, hvilket vil sige 4.

3. Hvad er rangen af A?

Vi rækkereducerer A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser, at der er 3 pivotindgange, hvorfor rangen af A er 3.

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af A?

Det er det antal søjler, hvor der ikke er pivot. Der er dog ingen af disse, hvorfor svaret er 0.

5. Er T på (surjektiv)?

T er surjektiv, hvis der er pivot i alle rækker. Dette er ikke tilfældet.

6. Er T en-til-en (injektiv)?

T er injektiv, hvis der er pivot i alle søjler. Dette ER tilfældet.

Problem 6

Hvilken af de følgende vektorer stemmer overens med produktet $A\mathbf{b}$ af matricen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Svar:

Vi har

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 1 \\ -10 + 6 \\ 8 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Problem 7

Opgaven tager udgangspunkt i $m \times m$ matricer A og B. Sæt $C = BA$ og $D = AB$. Desuden er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A med tilhørende egenværdi 2, og $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenværdi -4.
Er det altid sandt, at

1. v er en egenvektor for C?

Vi har

$$C\mathbf{v} = BA\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B\mathbf{w} = -4\mathbf{w} = -4A\mathbf{v} = -4 \cdot 2\mathbf{v} = -8\mathbf{v}.$$

Det vil sige, at $\mathbf{v}$ er en egenvektor til C med tilhørende egenværdi -8.

2. v er en egenvektor for D? (Fejl i first.math facit)

Da $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$, må $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}$, og dermed er $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Dette giver sammen med de andre informationer, at

$$D\mathbf{v} = AB\mathbf{v} = AB\frac{1}{2}\mathbf{w} = \frac{1}{2}AB\mathbf{w} = \frac{1}{2}A\left(-4\mathbf{w}\right) = -2A\mathbf{w} = -2A(2\mathbf{v}) = -4A\mathbf{v} = -4 \cdot 2\mathbf{v} = -8\mathbf{v}.$$

Altså er $\mathbf{v}$ en egenvektor til D med egenværdien -8.

3. w er en egenvektor for $B^2 = BB$?

Vi har

$$B^2\mathbf{w} = BB\mathbf{w} = B(B\mathbf{w}) = B(-4\mathbf{w}) = -4B\mathbf{w} = -4 \cdot (-4\mathbf{w}) = 16\mathbf{w}.$$

$\mathbf{w}$ er altså en egenvektor til B^2 med 16 som tilhørende egenværdi.

Problem 8

De tre vektorer $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-3\\2\\4\end{bmatrix}$. udgør tilsammen en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^3$. Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$, så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Der gælder:

1. Svar:

Der gælder altid, at $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

2. Svar:

Vi har nu, at $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$. Vi finder først prikproduktet mellem $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0.$$

Dette betyder altså, at:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{0}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{0} = \mathbf{u}_2.$$

3. Svar:

For $\mathbf{v}_3$ har vi:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2.$$

Vi betragter først prikprodukterne for $\mathbf{u}_3$ på henholdsvis $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$. Vi har:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-3\\2\\4\end{bmatrix} = -3 + 4 + 8 = 9$$

og

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-3\\2\\4\end{bmatrix} = 12 + 2 + 4 = 18.$$

Første svarmulighed er altså ikke gyldig, da skalarprodukterne da ville have givet 0. Vi betragter nu de kvadrerede længder (længder i anden) af $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$:

$$\|\mathbf{u}_1\|^2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

og

$$\|\mathbf{u}_2\|^2 = \sqrt{(-4)^2 + 1^1 + 1^1}^2 = (-4)^2 + 1 + 1 = 16 + 1 + 1 = 18.$$

Det vil sige, at vi har:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{9}{9}\mathbf{u}_1 - \frac{18}{18}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2.$$

Problem 9

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. A og B er inverse til hinanden.

For at undgå skrivearbejde (det her eksamenssæt har været irriterende formuleret for min LaTex-forklaringer) skrives B med 1/2 ude foran. Vi har:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De er altså hinandens inverse.

2. C og D er inverse til hinanden?

Den her gider jeg simpelthen ikke gange sammen i LaTex. Men ganges 3. række i C og 2. i D sammen, så skulle dette give et 0 (hvis vi skulle få identitetsmatricen), men dette giver i stedet 2. Altså kan de ikke være hinandens inverse.

3. A er diagonaliserbar?

Vi har

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0.$$

Vi finder diskriminanten:

$$d = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8.$$

Da diskriminanten er større end nul, så findes der to forskellige rødder til andengradspolynomiet. Det betyder derfor, at der er to ud af to mulige egenværdier, som er forskellige. Dermed er A diagonaliserbar.

4. B er diagonaliserbar?

Da A er diagonaliserbar, kan vi skrive A således:

$$A = PDP^{-1}.$$

Da $B = A^{-1}$, har vi:

$$B = A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P,$$

hvor P er en ortogonal matrix og D er en diagonalmatrix. Altså kan B også diagonaliseres.

5. C er diagonaliserbar?

Da C er en øvre trekantsmatrix, kan vi aflæse egenværdierne direkte til at være 1, 2 og 2. Det vil sige, at egenværdien 2 har multiplicitet 2. Vi skal altså se, om egenrummet til denne egenværdi bliver udspændt af to vektorer. Vi har:

$$C - 2I = \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har altså kun 1 fri variabel, men vi skulle have haft to, hvis C skulle have været diagonaliserbar.

6. D er diagonaliserbar.

Vi udregner $\det(D - \lambda I) = 0$ ved brug af kofaktor-metoden. Vi har:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - 1\cdot 1\right) = 0.$$

Da den lille parentes, $(1-\lambda)$, er ganget på resten, kan vi konkludere, at $\lambda = 1$ får denne parentes til at give nul, og dermed bliver hele venstresiden 0. Dermed 1 en egenværdi. Betragter vi den store parentes, så har vi:

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\lambda = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \mp 1.$$

Den store parentes giver altså to forskellige egenværdier, som ikke er 1. Dermed har vi tre forskellige egenværdier til en 3×3-matrix, hvorfor D altså er diagonaliserbar.

Problem 10

I denne opgave tages udgangspunkt i vektorerne $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ samt i en lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, som opfylder:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}.$$

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2]$ være standardmatricen for transformationen T; $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er altså søjlevektorerne i A.
Hvilke af de følgende udsagn er sande?

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale.

Hvis prikproduktet mellem dem er 0, er de ortogonale:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0.$$

Altså er de ortogonale. - En anden måde at se det på er, at de begge

2. $\mathbf{u}$ er en egenvektor for T.

Vi husker definitionen for en egenvektor $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Men det er lige præcis tilfældet, da

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = 1\mathbf{u}.$$

Altså er $\mathbf{u}$ en egenvektor for T med egenværdien 1. Tilsvarende er $\mathbf{v}$ også en egenvektor med egenværdien -1.

3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er en egenvektor for T.

Nej, det havde den kun været, hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ havde delt samme egenværdi:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

4. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.28 \end{bmatrix}$.

Grundet dette og næste spørgsmål udregner vi blot A.[1] Vi ved, at A har to egenværdier, -1 og 1, med egenvektorerne $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$. Disse to egenvektorer har samme længde, og denne er:

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Vi ved, at A er diagonaliserbar, dvs. $A = PDP^{-1}$, hvor

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

[1] Det er lettest for mig i LaTex med argumentationen. Ellers ville jeg have brugt en lidt anden vej.

Vi kan hurtigt udregne P^{-1}, vi skal blot bruge determinanten af P:

$$\det P = \det\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5^2}\det\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{25}(3\cdot 3-(-4)\cdot 4) = \frac{1}{25}(9+16) = \frac{25}{25} = 1.$$

Vi husker nu formlen

$$B = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix},$$

hvorfor vi har:

$$P^{-1}\frac{1}{1}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}.$$

Vi kan altså nu udregne A:

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}.$$

Vi ganger altså blot sammen og får:

$$A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}9-16 & 12+12\\12+12 & 16-9\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & 24\\24 & 7\end{bmatrix} =$$

Vi ser altså, at $\mathbf{a}_1$ ikke er $\begin{bmatrix}0.96\\0.28\end{bmatrix}$. Dette er $\mathbf{a}_2$ derimod.

5. $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}0.96\\0.28\end{bmatrix}$.

Sandt, se besvarelsen for opgave 4.

6. A er en ortogonal matrix.

Da $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uafhængige, kan enhver vektor i $\mathbb{R}^2$ skrives som en linearkombination af disse. Vi har:

$$T(T(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})) = T(aT(\mathbf{u})+bT(\mathbf{v})) = T(a\mathbf{u}-b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u})-bT(\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}.$$

Det vil sige, at T er sin egen inverse - hvilket vil sige, at $A = A^{-1}$. Men som det fremgår i opgave 4, så er A symmetrisk. Dvs. $A = A^\top$. Men hvis $A = A^{-1}$ og $A = A^\top$, så må $A^\top = A^{-1}$, hvilket lige præcist betyder, at A er en ortogonal matrix.

7. T beskriver en drejning (rotation) i planen.

Af betingelsen

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u},$$

skal T være en 360 graders rotation. Af

$$T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v},$$

skal T være en 180 graders rotation. Den kan ikke opfylde begge betingelser, hvorfor den altså ikke roterer.

8. T beskriver en spejling (refleksion) i planen.

Da 7. ikke var sand, så SKAL dette være sandt, da ortogonale matricer er enten en rotation eller refleksion. Men vi kan lige tjekke, om det giver mening i forhold til vores betingelser:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

betyder, at $\mathbf{u}$ må ligge på selve spejlingsaksen. Da $\mathbf{v}$ er ortogonal med $\mathbf{u}$ må denne altså få negativt fortegn, hvilket præcist er, hvad der sker ved vores anden betingelse

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Problem 11

Opgaven tager udgangspunkt i matricen $A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ samt vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Det oplyses, at totalmatricen

$$[A \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

har reduceret række echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilke søjler i matricen A er pivotsøjler?

Da der er pivotindgange i søjle 1, 3 og 4 i totalmatricen er disse også pivotsøjler for A.

2. Hvad er rangen af matricen A?

Det er antallet af pivotindgange i A, hvilket vi fandt ud af i forrige opgave var 3.

3. Hvad er nulliteten af matricen A?

Det er antallet af ikke pivotsøjler i A. Der er 4 søjler i A totalt og 3 af disse er pivotsøjler, hvorfor nulliteten må være 1.

4. Findes der en løsning $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ til linginge $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $x_2 = 2$?

Ja, af totalmatricen fremgår det, at x_2 er en fri variabel for løsningerne til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Helt konkret kan det aflæses af totalmatricen, at

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4, \end{aligned}$$

hvilket betyder, at for $x_2 = 2$, så har vi $x_1 = -1 + x_2 = -1 + 2 = 1$. Derudover er x_3 og x_4 altid faste. Dvs. løsningen er $x_1 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4$.

Problem 12

I opgaven undersøges tre vektorer $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$.

Bemærk, at den sidste koordinat c i vektoren $\mathbf{c}$ er et variabelt reelt tal.
Hvilke af de følgende påstande er korrekte?

1. a, b og c er lineært afhængige vektorer for hvilke(n) værdi(er) af c?

Vi opstiller matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & c \end{bmatrix},$$

og rækkereducerer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & c-6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & c-4 \end{bmatrix}.$$

For at de er lineært uafhængige, må der ikke være pivotindgang i sidste søjle. Den eneste måde, vi kan undgå pivot, er ved at lade hele nederste række være en nulrække, hvorfor $c - 4 = 0$, hvilket betyder, at $c = 4$.

2. a, b og c udspænder $\mathbb{R}^3$ for hvilke(n) værdi(er) af c?

De udspænder $\mathbb{R}^3$, hvis vi kunne få pivotindgange i alle søjler i matricen fra før. Men det gør de jo lige præcis, hvis $c - 4 \neq 0$, hvorfor $c \neq 4$.

Problem 13

Opgaven handler om tre (6×6)-matricer A, B og $C = AB$.
Om disse vides, at $\det A = -2$ og $\det C = -6$.

1. Hvilken værdi har $\det(-A)$?

Vi bruger determinant-regneregler og husker, at A er en 6×6-matrix:

$$\det(-A) = (-1)^6 \det A = \det A = -2.$$

2. Hvilken værdi har $\det(2A)$?

Vi bruger determinant-regneregler og husker, at A er en 6×6-matrix:

$$\det(2A) = 2^6 \det A = 2^3 \cdot 2^3 \det A = 8 \cdot 8 \det A = 64 \det A = 64 \cdot (-2) = -128.$$

3. Hvilken værdi har $\det B$?

Vi har:

$$\det C = \det(AB) = \det A \det B \Leftrightarrow -6 = -2 \det B \Leftrightarrow B = 3.$$

4. Hvilken værdi har $\det(B^\top A)$?

Vi bruger determinant-regneregler og får:

$$\det(B^\top A) = \det(B^\top) \det(A) = \det(B) \det(A) = \det(A) \det(B) = \det(AB) = \det(C) = -6.$$

Man kan godt indsætte tallene, jeg synes bare lige, det kunne være sjovt for jer at vise, at det faktisk er determinanten af C, vi faktisk regner.

Problem 14

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:
```
» A = [1 2 -1; 3 1 1; 2 -1 1 ];
» b = [3; 4; 2];
» T = [A b];
```

1. Hvad er størrelsen af matricen T?

Matricen T er antallet af søjlerne i A og antallet af søjlerne i b. Det vil sige, at T har 3 søjler fra A og 1 søjle fra b, hvilket totalt er 4 (for dem, der ikke lige orker at tænke den udregning). Derudover har den samme antal rækker som både A og b, hvilket er 3. Dermed er T en 3×4-matrix.

2. Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning x. Hvilken af kombinationerne af MATLAB kommandoer beregner x?

Svaret er:
```
» R = rref(T); x=R(:,4)
```

R = rref(T) er den række reducerede echelon form af T. Da T har 4 søjler, så findes svaret for `x` i den 4. søjle af `R`, hvilket betyder, at vi bruger `x = R(:,4)` til at gemme (:) alle rækkerne fra 4. søjle i variablen x, som er vores entydige svar.