Besvarelser til Lineær Algebra
Ordinær Eksamen - 15. Juni 2018

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

Hvilke udsagn om ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

er sande?

Svar:

Lad os bare rækkereducere totalmatricen. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -13 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette betyder, at

$$\begin{aligned} &x_1 = -13 - 8x_3 \\ &x_2 = 7 + 3x_3 \\ &x_3 \text{ er fri variabel,} \end{aligned}$$

hvilket kan opsummeres med

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da x_3 er en fri variabel er der uendeligt mange løsninger. Endvidere giver specifikke værdier for x_3 konkrete løsninger. Vi har:

$$x_3 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Det betyder, at hvis $x_3 = -2$, så skal $x_1 = 3$ og $x_2 = 1$ før dette er en løsning.

Endvidere prøves for $x_3 = 1$:

$$x_3 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser altså, at $x_3 = 1$ skal medføre, at $x_1 = -21$ og $x_2 = 10$, før dette er en løsning til systemet.

Problem 2

I opgaven undersøges matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hvilke af de følgende påstande er korrekte?

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

For at $\mathbf{u}$ er en egenvektor, skal der gælde, at $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Vi har:

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u}$$

Det ses, at $A\mathbf{u} = -4\mathbf{u}$, hvorfor $\mathbf{u}$ er en egenvektor for A med egenværdien -4.

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

Vi har:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{v}$$

Det ses, at $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, hvorfor $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med egenværdien 1.

$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

Det ses, at:

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\mathbf{w}$$

Det ses, at $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$, hvorfor $\mathbf{w}$ er en egenvektor for A med egenværdien 4.

$\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$ har samme tilhørende egenværdi.

Nej, $\mathbf{u}$ havde egenværdien -4, hvorimod $\mathbf{w}$ havde egenværdien 4.

v og w er lineært afhængige.

Nej, for de er begge egenvektorer med forskellige tilhørende egenværdier.

A er diagonaliserbar.

Ja. A er en 3×3-matrix. Og vi har fundet 3 forskellige egenværdier for A, nemlig -4, 1 og 4. Multipliciteten er 1 for hver af egenværdierne, hvormed A er garanteret diagonaliserbar.

A er similær med diagonalmatricen $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Ja. Da A er diagonaliserbar er det muligt at opskrive

$$A = PDP^{-1},$$

hvor søjlerne i P indeholder egenvektorerne, og D er diagonalmatricen med egenværdierne. Da diagonalmatricen, D, kan skrives som en af følgende

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

jævnfør diagonaliseringen af A, er A altså også similær med disse matricer, hvilket inkluderer den i opgaven.

A er invertibel (regulær).

Ja. Da nulvektoren ikke er en egenværdi, er A invertibel.

Problem 3

A er en $m \times 2$-matrix og B er en $n \times 4$-matrix, sådan at $C = AB$ er en 4×4. A er standardmatricen for en lineær transformation $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, B er standardmatricen for en lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$, og C er standardmatricen for en lineær transformation $U\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

1. Hvilket værdier antager m og n?

Husk, at $C = AB$. Det betyder, at $(m \times 2)(n \times 4) = 4 \times 4$. For at A og B skal kunne ganges sammen, så skal $n = 2$. Ellers er det ikke et gyldigt produkt. Endvidere giver 4×4-delen, at $m = 4$ for at slutproduktet har de rigtige dimensioner.

2. Hvilke af udsagnende kan umuligt være sande?

Vi opsummerer lige de kendte detaljer:

A hører til S og er en 4×2-matrix. B hører til T og er en 2×4-matrix. C hører til U og er AB.

Surjektivitet:

Husk, at hvis en lineær afbildning skal være surjektiv, skal der være pivot i alle rækker. Da A har færre søjler end rækker, kan A umuligt være surjektiv.

Da B har færre rækker end søjler, kan der sagtens være pivot i alle rækker i B. Det er altså muligt, at B er surjektiv.

Surjektivitet betyder, at hele kodomænet (værdimængden) bliver ramt. I og med, at $C = AB$, så uanset om B er surjektiv (rammer hele sit kodomæne), så har vi fastslået tidligere, at A ikke kan ramme hele sit kodomæne (være surjektiv). Derfor kan C heller ikke være surjektiv.

Injektivitet:

Husk, at hvis en lineær afbildning skal være injektiv, skal der være pivot i alle søjler. Da A har færre søjler end rækker, kan A altså godt være injektiv.

Da B har færre rækker end søjler, kan B altså ikke have pivot i alle søjler, og derfor kan B umuligt være injektiv.

Hvis en matrix ikke er injektiv, findes der andre vektorer i nulrummet end nulvektoren. Det vil sige, at der findes en vektor $\mathbf{v} \in \operatorname{Null} B$, hvilket betyder, at $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Betragt derfor:

$$C\mathbf{v} = AB\mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \text{for } \mathbf{v} \in \operatorname{Null} B.$$

Helt konkret vil en vektor i nulrummet af B også ligge i nulrummet af C. Derfor kan C umuligt være injektiv, når B umuligt kan være injektiv.

Problem 4

Her ses på matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Er d indeholdt i søjlerummet $\operatorname{Col} A$?

Nej, $\mathbf{d}$ har en dimension for meget til at kunne ligge i søjlerummet for A.

2. Er b indeholdt i søjlerummet $\operatorname{Col} A$?

Vi betragter matricen $[A\,\mathbf{b}]$ og rækkereducerer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 18 & 28 \end{bmatrix}.$$

Der er pivot i de 3 første søjler - hvorfor der ikke er pivot i den sidste. Dermed må $\mathbf{b}$ ligge i søjlerummet for A.

3. Er c indeholdt i nulrummet $\operatorname{Null} A$?

Hvis dette er sandt skal $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Vi tjekker:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2 + 1 + 0 \\ 2 - 1 + 3 + 0 \\ -1 + 1 + 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Altså ligger $\mathbf{c}$ ikke i $\operatorname{Null} A$.

3. Er d indeholdt i nulrummet $\operatorname{Null} A$?

Hvis dette er sandt skal $A\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Vi tjekker:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2 - 3 + 3 \\ 4 - 1 - 9 + 6 \\ -2 + 1 - 6 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Altså ligger $\mathbf{d}$ ikke i $\operatorname{Null} A$.

Problem 5

Hvilken af de følgende vektorer stemmer overens med produktet $A\mathbf{b}$ af matricen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

Svar:

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ 5 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) \\ -5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2 \\ 5 + 6 \\ -5 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Problem 6

Opgaven tager udgangspunkt i ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

1. Opskriv totalmatricen $[A\ \mathbf{b}]$.

Denne er blot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Opskriv den reducerede trappematrix for A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Hvilken af de følgende påstande er sand?

Systemet er KONSISTENT, da der ikke er pivot i sidste søjle. Vi ser endvidere, at

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_3 \\ x_2 &= 4 + x_3 \\ x_3 &\text{ er fri,} \end{aligned}$$

hvorfor løsningerne til ligningssystemet kan skrives:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da x_3 er en fri variabel er der uendeligt mange løsninger. For en givet værdi af x_3 kan x_1 og x_2 findes for, at de er løsninger. Vi tjekker:

$$x_3 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette stemmer over ens med

$$x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 1 \text{ er en blandt flere af systemets løsninger.}$$

For god ordens skyld lad os tjekke den anden mulighed:

$$x_3 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dette stemmer ikke over ens med

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3 \text{ som løsning.}$$

Problem 7

Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ betragtes for $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det oplyses, at totalmatricen $[A\ \mathbf{b}]$ er rækkeækvivalent med den reducerede echelonmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilke søjler i matricen A er pivotsøjler?

Dette er søjlerne 1 og 3, da det er de første ikke-nul indgange i deres respektive rækker OG søjler, hvilket ses i den reducerede trappematrix af totalmatricen.

2. Hvad er rangen af matricen A?

Der er 2 pivotsøjler i A, derfor er rangen 2.

3. Hvad er nulliteten af A?

Husk på, at den rækkereducerede matrix, der ses, er totalmatricen på trappeform. Der er kun 4 søjler i A, og 2 af disse er pivot. Nulliteten er søjler, der ikke er pivot, hvilket altså må være de resterende 2.

4. Har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ hvori $x_2 = -3$?

Da søjle 2 og 4 ikke er pivotsøjler, er x_2 og x_4 frie variable. Det vil sige, at hvis vi blot vælger en værdien for x_2, så vil der altid være en løsning, da systemet er konsistent. Som en lille sidenote kan det bemærkes, at da x_4 også er en fri variabel, så vil der stadig være uendeligt mange løsninger trods en fastsættelse af værdien for x_2.

5. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har som partikulærløsning:

Totalmatricen giver os følgende ligheder

$$\begin{aligned} &x_1 = -2 + 2x_2 - x_4 \\ &x_2 \text{ er fri} \\ &x_3 = 1 - x_4 \\ &x_4 \text{ er fri.} \end{aligned}$$

Dette betyder, at alle løsninger kan skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vælges $x_2 = 2$ og $x_4 = 1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da $x_2 = 1$ og $x_4 = 1$ blandt andet medfører, at $x_1 = -1$, kan $\mathbf{x} = (-2, 1, 1, 1)$ IKKE være en løsning. Vi prøver igen med $x_2 = 1$ og $x_4 = -1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da $x_2 = 1$ og $x_4 = -1$ blandt andet medfører, at $x_1 = 1$, kan $\mathbf{x} = (-2, 1, -1, -1)$ IKKE være en løsning. Vi prøver med den sidste for $x_2 = 0$ og $x_4 = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette stemmer perfekt over ens med svaret $\mathbf{x} = (-2, 0, 1, 0)$, som derfor er en løsning.

Problem 8

I opgaven undersøges tre vektorer $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ t \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$. Bemærk, at den sidste koordinat t i vektoren $\mathbf{c}$ er et variabelt reelt tal.

1. a, b og c er lineært afhængige vektorer for hvilke(n) værdi(er) af t?

Vi opstiller en matrix og rækkereducerer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & t+6 \end{bmatrix}.$$

Hvis vektorerne ikke må være lineært afhængige, må der ikke være pivot i alle søjlerne. Den eneste måde at undgå dette på er ved at lade $t = -6$, således der fås en nulrække.

2. a, b og c udspænder $\mathbb{R}^3$ for hvilke(n) værdi(er) af t?

Dette er det modsatte tilfælde af før. Vektorerne udspænder kun $\mathbb{R}^3$, hvis der er pivot i alle søjlerne fra før. Det vil sige, at $t \neq -6$.

Dette er dog lidt et snydespørgsmål, da $t =\neq -6$ ikke er det eneste svar. For $t = 2$ er også et svar, da $2 \neq -6$.[1]

[1] Medmindre man er en matematiker, der arbejder med gruppeteori, men det gør I ikke, så glem den her fodnote.

Problem 9

Her ses på to 5×5-matricer A og B. Desuden er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A med tilhørende egenværdi -3, og $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er en egenvektor for B med egenværdi 5.

1. Er w altid en egenvektor for $B^2 = BB$?

Da $\mathbf{w}$ er en egenvektor for B med egenværdien 5, ved vi, at $B\mathbf{w} = 5\mathbf{w}$ pr. definition. Altså er

$$B^2\mathbf{w} = BB\mathbf{w} = B5\mathbf{w} = 5B\mathbf{w} = 5 \cdot 5\mathbf{w} = 25\mathbf{w}.$$

Altså er $\mathbf{w}$ en egenvektor for B^2 med egenværdien 25.

2. Er v altid en egenvektor for BA?

Vi ved, at $A\mathbf{v} = -3\mathbf{v}$, $Av = \mathbf{w}$ og $B\mathbf{w} = 5\mathbf{w}$. Derfor er

$$BA\mathbf{v} = B\mathbf{w} = 5\mathbf{w} = 5A\mathbf{v} = 5 \cdot (-3)\mathbf{v} = -15\mathbf{v}.$$

Altså er $\mathbf{v}$ en egenvektor for BA med egenværdien -15.

3. Er v altid en egenvektor for AB?

Ja, denne er altid det samme som nummer 2 i det givne setup og egenværdien er altid $\lambda_1\lambda_2$, som er de to oplyste egenværdier ganget sammen. Se eventuelt mine noter for lineær algebra.

Husk, at $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$, og da $A\mathbf{v} = -3\mathbf{v}$ er $\mathbf{w} = -3\mathbf{v}$, hvorfor $\mathbf{v} = -\frac{1}{3}\mathbf{w}$. Vi ser at

$$AB\mathbf{v} = -\frac{1}{3}AB\mathbf{w} = -\frac{5}{3}A\mathbf{w} = -5A\mathbf{v} = 5 \cdot (-3)\mathbf{v} = -15\mathbf{v}.$$

Problem 10

De tre vektorer $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ udgør en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^3$. Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$, så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Hvilken udsagn gælder?

Svar:

Husk den generelle formel for Gram-Schmidt processen er

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_n}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_n}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2}\mathbf{v}_{n-1}.$$

1) Vi sætter altid $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

2) Vi finder først længden (kvadreret) af $\mathbf{v}_1$ og prikproduktet mellem $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{u}_2$:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = (-1)^2+(-1)^2 = 2, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) = 1+0+1 = 2.$$

Da $\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{v}_1\|^2} = \frac{2}{2} = 1$ er

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3) Vi laver igen indledende udregninger:

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = 4^2 = 16$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) = 0 + 0 + 4 = 4$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-4) = 0 - 4 + 0 = -4.$$

Dermed er

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - \frac{4}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{16}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{v}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_2.$$

Det ses, at 3'eren ikke passer til 'ingen af delene'.

Problem 11

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. A og B er inverse til hinanden?

Vi ganger og ser:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot \frac{-2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \\ 0 \cdot 1 + 3 & 0 \cdot \frac{-2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser, at de giver identitetsmatricen, hvorfor de er inverse til hinanden.

2. C og D er inverse til hinanden?

Jeg er doven. Gang selv matricerne sammen og se, at du får identitetsmatricerne. Tillykke, du har nu vist, de er hinandens inverse.

3. A er diagonaliserbar.

Ja. Da A er en (øvre) trekantsmatrix ses egenværdierne på diagonalen. Disse er altså 1 og 3. Der er altså to forskellige egenværdier, hvorfor de hver kun har multiplicitet 1. Dermed er A diagonaliserbar.

4. B er diagonaliserbar.

Ja, fordi B er invers til A, og A er diagonaliserbar, er B også diagonaliserbar. Dette skyldes:

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow B = A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Et andet argument, der kan bruges er ved at se, at B også er en trekantsmatrix, hvorfor egenværdierne 1 og 1/3 står på diagonalen. Disse er forskellige, så multipliciteten af egenværdierne er 1. Dermed er B diagonaliserbar.

5. C er diagonaliserbar.

Denne er også en trekantsmatrix, så egenværdierne 1 og 1/2 kan aflæses. Det ses, at 1 har multiplicitet 2. Vi skal altså tjekke, om egenrummet har dimension 2. Vi trækker 1 fra på diagonalen:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der er altså 2 pivotsøjler. Dette betyder, der kun er 1 fri variabel, hvorfor egenrummet også kun har dimension 1. Da dimensionen af egenrummet (1) ikke er lig med multipliciteten af den egenværdi, der blev trukket fra (egenværdien 1 har multiplicitet 2), er C ikke diagonaliserbar.

6. D er diagonaliserbar.

Nej, da C og D er inverse til hinanden, og C ikke er diagonaliserbar, da er D heller ikke diagonaliserbar.

Problem 12

I denne opgave tages udgangspunkt i vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ og i en lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, som opfylder:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}.$$

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ være standardmatricen for transformationen T ($\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er altså søjlevektorerne i A).

1. u og v er ortogonale.

Vi prikker de to vektorer:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0.$$

Da prikproduktet er 0, er vektorerne ortogonale.

2. Hvilke af vektorerne u og v er egenvektorer for T?

Begge, da $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ har $\mathbf{u}$ tilhørende egenværdi 1. Ligeledes giver $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$, at $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenværdien -1.

Vektorerne $\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{u}$ og $\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{v}$ udgør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$.

Vi ved allerede, at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale - det ændrer en skalering ikke på. Vi skal altså blot tjekke, hvad længden af de to vektorer er. Det er samme tal, der indgår med forskellige fortegn, så de har samme længde:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Da længden af $\mathbf{u}$ (og $\mathbf{v}$) er $\sqrt{10}$, og det er denne enhed, der divideres med, er der altså tale om en ortonormal base, der vektorerne ender med at have længde 1.

4. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$.

Vi ved, at 1 og -1 er egenværdier til T og dermed dennes standardmatrix A. Disse er forskellige, og da A er en 2×2-matrix er det de eneste med multiplicitet 1. Dette betyder, at A kan diagonaliseres ved $A = PDP^{-1}$. Her indeholder P egenvektorerne og D egenværdierne, så de fremtræder i samme orden. Et bud:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu finde P^{-1} ved at bytte rundt på diagonalen og ændre fortegn på antidiagonalen og dividere med determinanten for P:[2]

$$P^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - (-3) \cdot 3} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

[2] Grundet resultatet fra før, kan man faktisk bruge de vektorer som matrix og lade denne stå som P. Dermed kan denne blot transponeres for at finde den inverse, da disse vil være ortogonale matricer.

Dermed er

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vi ser, da alle elementerne skal divideres med 10 grundet skalaren ude foran, at $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$.

5. $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

Ja, se forrige opgave 4.

6. A er en ortogonal matrix

Lad os blot gange A og $A^\top$ sammen. Hvis det giver identitetsmatricen, så er de ortogonale:

$$AA^\top = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} -8 \cdot (-8) + 6 \cdot 6 & -8 \cdot 6 + 6 \cdot 8 \\ 6 \cdot (-8) + 8 \cdot 6 & 6 \cdot 6 + 8 \cdot 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = I.$$

Da $AA^\top = I$ er A en ortogonal matrix.

7. Er $T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ for alle vektorer u og v i $\mathbb{R}^2$?

Ja. Faktisk er dette en anden måde at sige, at A er en ortogonal matrix på.

Eksaminator er dog lidt irriterende, når vedkommende vælger at bruge 'vilkårlige' $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i en opgave, hvor samme vektorer er defineret til noget specifikt. Så jeg kalder lige de vilkårlige vektorer for $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$. Man kunne eventuelt prøve at vise opgave 6 ved at lave udregningen i 7'eren. Vi ved, at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale, så de udspænder hele $\mathbb{R}^2$. Vi kan altså lave alle vektorer som en linearkombination af disse:

$$\mathbf{w}_1 = \alpha_1 \mathbf{u} + \beta_1 \mathbf{v}, \qquad \mathbf{w}_2 = \alpha_2 \mathbf{u} + \beta_2 \mathbf{v}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1) \cdot T(\mathbf{w}_2) &= T(\alpha_1 \mathbf{u} + \beta_1 \mathbf{v}) \cdot T(\alpha_2 \mathbf{u} + \beta_2 \mathbf{v}) \\ &= (\alpha_1 T(\mathbf{u}) + \beta_1 T(\mathbf{v})) \cdot (\alpha_2 T(\mathbf{u}) + \beta_2 T(\mathbf{v})) \\ &= (\alpha_1 \mathbf{u} - \beta_1 \mathbf{v}) \cdot (\alpha_2 \mathbf{u} - \beta_2 \mathbf{v}) \\ &= \alpha_1 \mathbf{u} \cdot \alpha_2 \mathbf{u} - \beta_1 \mathbf{v} \cdot \alpha_2 \mathbf{u} + \alpha_1 \mathbf{u} \cdot (-\beta_2) \mathbf{v} - \beta_1 \mathbf{v} \cdot (-\beta_2) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Husk, at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale, så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ovenstående reduceres altså til:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1) \cdot T(\mathbf{w}_2) &= \alpha_1 \mathbf{u} \cdot \alpha_2 \mathbf{u} - \beta_1 \mathbf{v} \cdot \alpha_2 \mathbf{u} + \alpha_1 \mathbf{u} \cdot (-\beta_2) \mathbf{v} - \beta_1 \mathbf{v} \cdot (-\beta_2) \mathbf{v} \\ &= \alpha_1 \mathbf{u} \cdot \alpha_2 \mathbf{u} + \beta_1 \mathbf{v} \cdot \beta_2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Lignende udregning fås ved:

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = (\alpha_1 \mathbf{u} + \beta_1 \mathbf{v}) \cdot (\alpha_2 \mathbf{u} + \beta_2 \mathbf{v}) = \alpha_1 \mathbf{u} \cdot \alpha_2 \mathbf{u} + \beta_1 \mathbf{v} \cdot \beta_2 \mathbf{v} = T(\mathbf{w}_1) + T(\mathbf{w}_2).$$

Så det stemmer over ens med, hvad vi fandt ud af i forrige opgave. A er ortogonal.
- Og opgave 7 er et klart ja.

8. Afbildningen T beskriver i planen:

En spejling. Dette er grundet, at vi er i to dimensioner, hvor A er en ortogonalmatrix med egenværdierne 1 og -1. Alle disse elementer samlet medfører en spejling.

Problem 13

Her ses på 5×5-matricer A og B, som opfylder, at $\det A = -3$ og $\det AB = 6$.

1. Hvilken værdi har $\det(-A)$?

Husk, at det er 5×5-matricer. Derfor fås:

$$\det(-A) = (-1)^5 \det(A) = -1 \cdot (-3) = 3.$$

2. Hvilken værdi har $\det(2A)$

Vi bruger samme regneregel og opnår:

$$\det(2A) = 2^5 \det A = 32 \cdot (-3) = -96$$

3. Hvilken værdi har $\det B$?

Vi ser, at

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 6 \Leftrightarrow \det(B) = \frac{6}{\det(A)} = \frac{6}{-3} = -2.$$

4. Hvilken værdi har $\det((B^\top A)^\top)$?

Transponering ændrer ikke determinanten, vi har:

$$\det((B^\top A)^\top) = \det(B^\top A) = \det(B^\top)\det(A) = \det(B)\det(A) = -2 \cdot (-3) = 6.$$

Problem 14

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:
```
» A = [3 1 1; 1 2 -1; 2 -1 1 ];
» b = [4; 3; 2];
» T = [A b];
```

1. Hvad er størrelsen af matricen T?

Mellemrum indikerer søjleskift, og semikolon indikerer rækkeskift. Der er 3 søjler i A og 1 i b. Der er 3 rækker for begge. Derfor er T en 3×4-matrix.

2. Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning x. Hvilken af følgende kombinationer af MATLAB kommandoer beregner x?

Det gør:
» `R = rref(T); x=R(:,4)` Her rækkereducerer kommandoen `R = rref(T)` nemlig matricen T. Kommandoen `x=R(:,4)` indikerer, at x skal være 4. søjle og række (:). I MATLAB indikerer (:), at det skal være alle. Da kolon står først, er det altså alle rækker, der er tale om, hvilket er dem, vi vil have fat i, når vi har rækkereduceret en totalmatrix.