# Besvarelser til Lineær Algebra
# Ordinær Eksamen - 14. Juni 2019

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

# Indhold

# Problem 1

Opgaven tager udgangspunkt i ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{bmatrix}.$$

## 1. Angiv ligningssystemets udvidede koefficient/totalmatrix $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

Vi aflæser blot tallene (samt fortegn) i de respektive søjler og rækker:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

## 2. Bestem den reducerede trappematrix, som er rækkeækvivalent med $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

Vi rækkereducerer blot:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1\to r_3]{r_2+2r_1\to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2\to r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3. Hvilken af påstandende er sand?

### Systemet er inkonsistent?

Nej. Da der ikke er pivot i sidste søjle, er systemet lige så konsistent, som jeg er, når det kommer til scoring af damer. Jeg scorer nemlig konsekvent ingen damer - consistency is key I've been told.

### Systemet har kun én løsning?

Nej. Vi kan se, at $x_2$ er en fri variabel, der der ikke er pivot i anden søjle. Dette betyder, at der er uendeligt mange løsninger. (Bemærk, det kun er gældende, fordi systemet er konsistent).

### Systemet har uendeligt mange løsninger.

Ja. Det er jo ligesom den eneste mulighed, der er tilbage. Plus grunden findes i forrige svar. Hvilke løsninger er så muligheder? Vi omskriver matricens koefficienter til ligningssystemer og får:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Begge resterende svarmuligheder indeholder $x_3 = 0$ (ret beset gør alle svarmuligheder det), så det sorterer vi intet væk på. Men så er det heldigt, at vi kan indsætte $x_1$ og $x_2$ værdier i den første ligning. Vi kigger på $x_1 = 2$ og $x_2 = 1$:

$$2 - 2 \cdot 1 = 0 \neq 3.$$

Vi må nok erkende, at 0 ikke er 3, så det kan ikke være det rigtige svar.[1] Vi skal altså teste den sidste løsningsmulighed, $x_1 = -5$ og $x_2 = -4$:

$$-5 - 2 \cdot (-4) = -5 + 8 = 3.$$

Woop woop, det passer. Dab on dem haterz. Eller er det for ungt? Jeg er ligeglad, dobbeltdab. Skrrr skrrr.

## 4. Bestem hvilke udsagn, der er sande.

**Vektoren $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 0 \end{bmatrix}^\top$ er ikke en løsning til ligningssystemet.**

Lol, falsk. Vi har jo lige fundet ud af, at $x_1 = -5$, $x_2 = -4$ og $x_3 = 0$ rent faktisk var en løsning.

**Vektoren $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 0 \end{bmatrix}^\top$ opfylder $\mathbf{w} = A^{-1}\mathbf{b}$ for $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}^\top$**

Husk fra første opgave, at $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En matrix kan kun inverteres, hvis der er i pivot i alle søjler og rækker. Det er der bestemt ikke i $A$. Så spørgsmålet giver faktisk ikke engang mening, da $A^{-1}$ ikke eksisterer.

## Vektoren $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 0 \end{bmatrix}^\top$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, men den er ikke lig med $A^{-1}\mathbf{b}$.

Teknikaliteter får mig til at hade dette spørgsmål. Seriøst, nyt udsagn, men de bruger $\mathbf{b}$-definitionen fra et andet udsagn. Sig dog forhelvede bare: $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$, hvor $b$ er som før. Sandt eller falsk?

Vi ved fra forrige opgave, at $\mathbf{w}$ løste ligningssystemet givet i starten. Derfor skal $A\mathbf{w}$ faktisk være lig $\mathbf{b}$. Delen med 'men den er ikke lig med $A^{-1}\mathbf{b}$' kan du læse i forrige delsvar.

## Koefficientmatricen $A$ er ikke inverterbar.

Korrekt, det er den ikke. Se delsvar nummer 2.

[1] Fun fact: Aalborg Universitet lavede i juni 2019 en fejl, der bestod i at offentliggøre en testside, hvor AAU hed 'Hogwartz'. Så jeg har nærmest undervist i matematik på Hogwartz. Jeg må være en matemagiker (badum-tsch). Plus jeg kan faktisk få 0 til at være lig 3 uden, at det matematisk forkert. Men det skal du nok afholde dig fra at argumentere for i dit scenarie.

# Problem 2

Her ses på $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

## 1. Er b indeholdt i søjlerummet $\operatorname{Col} A$?

Hvis vi betragter matricen $[A\,\mathbf{b}]$, skal denne IKKE have pivot i sidste søjle:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1 \to r_3]{r_2-2r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_3 \to r_3}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Der er altså pivot i de tre første søjler og dermed ikke i den sidste, da der kun er 3 rækker.

## 2. Er $A \cdot \mathbf{c}$ indeholdt i søjlerummet $\operatorname{Col} A$?

Selvfølgelig! Vi kan skrive produktet således:

$$A \cdot \mathbf{c} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Det er en linearkombination af søjlerne i $A$, hvilket jo lige præcis definitionen af, at en vektor ligger i søjlerummet.

## 3. Er c indeholdt i nulrummet $\operatorname{Null} A$?

Hvis $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, da er $\mathbf{c}$ indeholdt i nulrummet. Vi kan blot bruge linearkombinationen fra forrige opgave:

$$A\mathbf{c} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

## 4. Er d indeholdt i nulrummet $\operatorname{Null} A$?

Vi ganger på:

$$A \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 6 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 0 + 0 - 6 \\ 12 - 0 + 0 - 12 \\ -6 + 0 - 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Altså er $A \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}$, hvilket betyder, at $\mathbf{d}$ er i $\operatorname{Null} A$.

# Problem 3

Her ses på matricerne $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

## 1. Angiv produktet $A\mathbf{b}$.

Vi ganger A og **b**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+2 \\ 0-6+4 \\ 2+4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

## 2. Angiv produktet $AB$.

Vi bemærker, at alle matricerne har unikke første-rækker. Så hvis vi kun udregner første række for både søjle 1 og 2, kender vi svaret:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 - 2 + 1 = 3.$$

og

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 3 - 4 + 0 = -1.$$

Så første række i produktet skal være $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Jeg løj. De har været nogle røvhuller ved at smide en 'ingen af dem'-mulighed ind, hvilket gør, at vi bliver nødt til at udregne hele produktet. Det gider jeg ikke på computeren. Det er røvsygt. Jeg kunne selvfølgelig lave et program, der laver udregningerne for mig samt skriver LaTex-koden. Men nej, det virker også mere omstændigt.

## 3. Bestem $A^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-2r_1\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3r_3-2r_2\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2+2r_3\to r_2]{r_1+r_3\to r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -12 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-r_3\to r_3]{\frac{1}{3}r_2\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2\to r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

Der har vi så vores inverse på højre side af den lodrette streg.

## 4. Bestem produktet $A^{-1}B$.

Hvis vi bare bruger samme rækkefølge af rækkereduktioner som i opgave 3 på matricen $B$, så kommer vi frem til produktet:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1\to r_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_3-2r_2\to r_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ -23 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+2r_3\to r_2]{r_1+r_3\to r_1} \begin{bmatrix} -19 & -19 \\ -45 & -42 \\ -23 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3\to r_3]{\frac{1}{3}r_2\to r_2} \begin{bmatrix} -19 & -19 \\ -15 & -14 \\ 23 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2\to r_1} \begin{bmatrix} -49 & -47 \\ -15 & -14 \\ 23 & 22 \end{bmatrix}$$

Det var en alternativ metode til den normale gangemetode. - Den er også lidt rarere at skrive på pc.

# Problem 4

Her ses på $7 \times 7$-matricer $A$ og $B$, som opfylder, at $\det A = -4$ og $\det(AB) = 12$.

## 1. Hvilken værdi har $\det\left(\frac{1}{2}A\right)$

Husk, at $A$ er en $7 \times 7$ matrix. Derfor fås:

$$\det\left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \det A = \frac{1}{2^7} \cdot (-4) = -\frac{2^2}{2^7} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

## 2. Hvilken værdi har $\det B$?

Vi har, at

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Divideres med $\det A$ på begge sider fås:

$$\det B = \frac{\det(AB)}{\det A} = \frac{12}{-4} = -3.$$

## 3. Hvilken værdi har $\det(A^{-1})$.

Vi har, at

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = (-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

## 4. Hvilken værdi har $\det(B^\top (A^{-1})^\top)$

Vi husker, at transponering intet gør ved determinanten. Vi får altså:

$$\det(B^\top (A^{-1})^\top) = \det(B^\top) \det((A^{-1})^\top) = \det(B) \det(A^{-1}) = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

# Problem 5

Vektorerne $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ udgør en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^4$. Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$, så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$. [2]

## 1. Bestem $\mathbf{v}_1$.

Vi sætter altid $\mathbf{v}_1$ til at være den første vektor i $\mathcal{B}$. Altså er $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Bemærk, at der kun skal findes en ortogonal og ikke en ortonormal basis. Dette betyder, at vi slipper for at skalere vektorerne (vi behøver ikke gange med 1/vektorlængden).

## 2. Bestem $\mathbf{v}_2$.

Vi bruger nu, at

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1.$$

Dermed fås:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0}{1 + 0 + 1 + 0}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{0 + 0 - 2 + 0}{2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{-2}{2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_1$$

Vi ved fra forrige opgave, at $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, derfor får vi, at

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$$

## 3. Bestem $\mathbf{v}_3$.

Vi bruger 'samme' formel som før:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2.$$

Fra forrige opgave ved vi, at $\|\mathbf{v}_1\| = 2$. Vi udregner endvidere

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$$

$$\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 + 1 + 0 + 0 = 3 \|\mathbf{v}_2\|^2 \quad = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3.$$

[2] Nøøøj, hvor er jeg bare glad for (læs: hader), at der er Gram-Schmidt opgaver. Håber I værdsætter mine noter, for jeg hader at bruge fritid på opgaver som dem her, hvor man bare følger en opskrift. Kedeligt.

Dette giver:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{2}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{3}{3}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

## 4. Bestem $\mathbf{v}_4$.

Vi skal benytte:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3.$$

Og vi udregner:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1-1 \\ 1-0-1 \\ 0+1-1 \\ 1-0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette giver skalarprodukterne:

$$\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$$

$$\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 - 2 + 1 + 0 = 0$$

$$\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Jamen alle prikprodukterne giver 0! Det vil sige, at alle (undtagen første) led forsvinder:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_4 - 0\mathbf{v}_1 - 0\mathbf{v}_2 - 0\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_4$$

Det var rart. Så er den overstået.

# Problem 6

I opgaven indgår tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ t \end{bmatrix}.$$

Bemærk, at det sidste koordinat $t$ i vektoren $\mathbf{c}$ er et variabelt reelt tal.

## 1. For hvilke værdier af $t$ er a, b og c lineært afhænginge?

Vi bringer matricen $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & t \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1 \to r_3]{r_2+3r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-9 \end{bmatrix}.$$

Husk, at søjlevektorerne ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$) er lineært uafhængige, hvis der er pivotindgange i alle søjlerne. Vi søger det modsatte. Dermed skal der ikke være pivot i sidste søjle. Dette er kun gældende for $t - 9 = 0$, hvilket altså betyder, at $t = 9$.

## 2. For hvilke værdier af $t$ udspænder a, b og c rummet $\mathbb{R}^3$.

Det gør de kun, når $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lineært uafhængige. Altså skal $t \neq 9$. Så vi kan altså også krydse $t = -9$ og $t = -5$ af, da hverken $-9$ eller $-5$ er lig med 9. *Mind blown* Husk også, at 9 er en del af de reelle tal, så 'alle de reelle tal' er ikke en mulighed.

## 3. For hvilke værdier af $t$ udgør a, b og c en basis for $\mathbb{R}^3$.

Ej.. Nu tror de jo bare, at I er dumme. Det er samme argument som i 2'eren. Det er jo kun en basis for $\mathbb{R}^3$, hvis alle tre vektorer er lineært uafhængige. Og da de er lineært uafhængige og udspænder $\mathbb{R}^3$, så udgør de også en basis for $\mathbb{R}^3$. Vi må bare IKKE have, at $t = 9$. Derfor vælger vi værdierne $t = 4$ og $t = -4$.

## 4. For $t = 4$ bestem $\mathcal{B}$-koordinatøsjlen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ for $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1, 4, 2 \end{bmatrix}$.

Én svarmulighed skal opfylde følgende

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

for at være et svar. Hvis vi blot kigger på første række i matricen, så skal denne være lig -1. Altså:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1x + 0y + 2z = x + 2z = -1.$$

Vi tjekker nu alle svarmulighederne for at se, om de opfylder dette: Nummer 1, $\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\end{bmatrix}$:

$$1 + 2 \cdot 4 = 1 + 8 = 9 \neq -1.$$

Det kan altså ikke være nummer 1. Vi kigger på nummer 2, $\begin{bmatrix}1 & -8 & 0\end{bmatrix}$:

$$1 + 2 \cdot 0 = 1 \neq -1.$$

Det kan altså heller ikke være nummer 2. Hvad med nummer 3, $\begin{bmatrix}0 & -5 & 1\end{bmatrix}$?:

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Det kan altså heller ikke være nummer 3. Det skal altså være nummer 4! For god ordens skyld lad os prøve at gange denne på hele matricen for en sikkerhedsskyld (husk $t = 4$):

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -5\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)\\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)\\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 + 0 - 2\\ -3 + 2 + 5\\ 4 + 2 - 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 2\end{bmatrix} = \mathbf{v}.$$

Omg, så vi regnede altså rigtigt. Bemærk, sidste del var kun for 'good measure'. Hvis vi var sikre på vores udregninger, så behøvede vi ikke tjekke. Men de kunne selvfølgelig have lavet fejl. Og så måtte vi gerne brokke os!

# Problem 7

I rummet $\mathbb{R}^3$ er der givet en plan $W$ ved ligningen $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.

## 1. Markér den matrix, som er lig med den ortogonale projektionsmatrix $P_W$.

Vi har mulighederne:

$$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 & -2 & 4 \\ -2 & 11 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jeg gider ikke udregne dem, fordi vi først skal opstille en basis, lave en matrix $A$ ud fra dette og så bruge formlen $P_W = A(A^\top A)^{-1}A^\top$. Det tager for lang tid at skrive på computeren. Aaaaallerførst kigger vi lige på matricerne og godtager, at ingen af dem er asymmetriske. En projektionsmatrix skal være symmetrisk. Vi kan altså ikke sortere nogle fra på den måde.

Så lad os i stedet kigge på plan-ligningen:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Jeg synes, vi skal finde en tilfældig vektor i planen - altså skal den bare opfylde ovenstående. En vektor der springer mig i øjnene er $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.[3] Indsættes denne vektor i ligningen, får vi:

$$1 + 1 - 2 \cdot 1 = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Så venstre side er lig med højre side, præcis som det bør være. Altså ligger denne vektor allerede på planen. Grunden til, at jeg vælger en vektor på planen, er, at hvis vi projicerer en vektor fra planen ned på planen, så skal denne vektor være uændret. Vi kan altså nøjes med at gange $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ på de tre matricer. Jeg starter egentligt bare med at gange den på hver af de første rækker:

$$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}(11 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = \frac{1}{12}(11 - 2 + 4) = \frac{13}{12} \neq 1.$$

Det kan ikke være den første, da $\frac{13}{12} \neq 1$. Hvad med nummer 2?:

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}(5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{6}(5 + 1 + 2) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \neq 1.$$

Niks, heller ikke. Tredje gang er lykkens gang - lad os prøve at gange vektoren på hele matricen:

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 - 1 + 2 \\ -1 + 5 + 2 \\ 2 + 2 + 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det var satans (hehe, andensidste mellemregning var 666), det passer jo!. Da vores vektor bliver projiceret over i sig selv, er denne matrix svaret!

[3] Hint: Hvis du ikke kan se det med det samme, så prøv at skriv ligningen som $x_1 = -x_2 + 2x_3$. Så er $x_2$ og $x_3$ frie variable. Dem sætter vi blot til 1. Dermed fås $x_1 = -1 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$. Altså er $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en løsning.

### 2. Bestem ortogonalprojektionen $P_W\mathbf{v}$ af vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ på planen $W$:

Vi ganger jo bare:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{6}\left(1\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2}\begin{bmatrix} 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ja, alle tallene matrix-vektor-produktet var deleligt med 3, så vi forkortede lige brøken ude foran! Bemærk også lige, hvordan jeg brugte to forskellige multiplikationsmetoder i de to underopgaver. Jeg forkæler jer rigtigt.

# Problem 8

En lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har standardmatricen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -8 & 3 \end{bmatrix}$.

## 1. Hvilken værdi har tallet $n$?

En lineær transformation kan skrives:

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

så spørgsmålet er, hvilken dimension vektoren $\mathbf{v}$ tilhører for, at produktet $A\mathbf{v}$ eksisterer. Altså vælger vi 4, da $\mathbf{v}$ skal have samme antal indgange, som $A$ har søjler.

## 2. Hvilken værdi har tallet $m$?

Nu indikerer $m$, hvad resultatet af produktet $A\mathbf{v}$ giver. Men det er jo lige præcis en vektor i $\mathbb{R}^3$, da der er 3 rækker. Vi svarer altså $m = 3$.

## 3. Hvad er rangen af $A$?

Vi rækkereducerer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1 \to r_3]{r_2-3r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Der er altså pivot i alle rækker (og dermed 3 søjler). Rangen af $A$ er altså 3.

Sidenote: Jeg kan konkludere det allerede ved ovenstående udregning, da første række har pivot i første søjle. De to resterende rækker er ikke et multiplum af hinanden (kan ikke finde et tal, jeg kan gange på den ene række og få den anden).

## 4. Hvad er dimensionen af nulrummet af $A$?

Der er 4 søjler og 3 er lineær uafhængige. Derfor er der:

$$\dim(\operatorname{Null} A) = 4 - 3 = 1$$

resterende dimensioner til nulrummet.

## 5. Hvad er dimensionen af søjlerummet af $A$?

Dimensionen af rækkerummet, dimensionen af søjlerummet og rangen af $A$ er altid det samme. Så 3.

## 6. Hvad er dimensionen af nulrummet af den transponerede matrix $A^\top$, dvs $\dim(\operatorname{Null} A^\top)$

Well, $A^\top$ har kun 3 søjler, men rangen er stadig 3, så nulrummet har:

$$\dim(\operatorname{Null} A^\top) = 3 - 3 = 0.$$

### 7. Hvad er dimensionen af ortogonalkomplementet til nulrummet af $A$, dvs. $\dim(\operatorname{Null} A^{\perp})$?

Nulrummet af $A$ og rækkerummet af $A$ er hinandens ortogonale komplementer. Så fra opgave 5 er svaret 3.

### 8. Hvad er dimensionen af rækkerummet af $A$, dvs. $\dim(\operatorname{Row} A)$?

Se svar 5 eller 7, det er helt det samme.

# Problem 9

Opgaven vedrører følgende system af ordinære differentialligninger

$$y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t), \qquad y_2'(t) = -y_1(t) + 4y_2(t)$$

## 1. Angiv den matrix, som svarer til systemets koefficientmatrix $A$?

Det er nok lettest at se, hvis vi opstiller ligningerne under hinanden:

$$\begin{aligned} y_1(t) + 2y_2(t) &= y_1'(t) \\ -y_1(t) + 4y_2(t) &= y_2'(t) \end{aligned}$$

Koefficientmatricen aflæses da til at være:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

## 2. Bestem egenværdierne for $A$.

Det vi trækker $\lambda$ fra på diagonalen og udregner determinanten:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot (-1) = 4 + \lambda^2 - 5\lambda + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Vi sætter dette lig nul og løser andengradsligningen:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Diskriminanten er:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

Rødderne/egenværdierne er da

$$\lambda = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

## 3. Bestem den af mængderne, der består af egenvektorer for $A$.

Normalvis ville jeg bare gange vektorerne på $A$ og tjekke, at vi fik en vektor, der enten var 2 eller 3 gange så stor. Men nu skriver jeg på computer, så det er lidt hurtigere bare at rækkereducere. Husk vi skal trække egenvektorerne fra på diagonalen. Vi kigger først på $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette kan skrives $-x_1 + 2x_2 = 0$ og dermed, $x_1 = 2x_2$. Vi får altså, at en egenvektor til $A$ er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der er kun én mængde, der har en vektor, som opfylder, at $x_1$ er dobbelt så stor som $x_2$. Så vi vælger:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi ved, at løsninger generelt er givet ved:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

eller skrevet i vores tilfælde:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = a e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette kan selvfølgelig skrives på 'systemform':

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2a e^{2t} + b e^{3t} \\ y_2(t) &= a e^{2t} + b e^{3t} \end{aligned}$$

# Problem 10

I denne opgave betragtes de følgende 4 vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

## 1. $\mathbf{v}_2$ ikke er proportional med $\mathbf{v}_1$?

Vi skal kunne gange en konstant på $\mathbf{v}_1$ for at få $\mathbf{v}_2$ (og omvendt), hvis de skal være proportionale. Men $\mathbf{v}_1$'s to første indgange er ens, hvilket ikke er tilfældet for $\mathbf{v}_2$, så de kan IKKE være proportionale. Så ja, $\mathbf{v}_2$ er ikke proportional med $\mathbf{v}_1$.[4]

## 2. $\mathbf{v}_2$ er en linearkombination af $\mathbf{v}_1$?

Spørgsmål 1 og 2 er praktisk talt samme spørgsmål, når der kun nævnes to vektorer.

## 3. $\mathbf{v}_3$ er en linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$?

Vi bemærker lige, at næste spørgsmål handler om linearkombination for $\mathbf{v}_4$. Så vi opstiller altså hele matricen og rækkereducerer.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \to r_3 \\ r_4 - 3r_1 \to r_4}]{r_2 + r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2 \to r_4]{r_1 + r_2 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_3 \to r_4]{r_1 + r_3 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Der er pivotsøjler i alle søjler, altså er alle vektorerne lineært uafhængige. De kan altså IKKE være en linearkombination af hinanden.

Nej, da de alle er lineært uafhængige.

## 4. $\mathbf{v}_4$ er en linearkombination af $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$?

Nej, da de alle er lineært uafhængige.

## 5. tre af vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ frembringer den fjerde?

Nej, da de alle er lineært uafhængige.

[4] Den her måde at stille spørgsmål på minder mig om Terkel i knibe. 'Skal vi ikke følges hjem fra skole, Terkel?' - Jo Rita, vi skal ikke følges hjem fra skole!

### 6. vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ er lineært uafhængige?

Det ved jeg ikke. (Læs: Hvis du ikke kan se det sjove i mit svar, fortjener du ikke et svar.)

### 7. enhver vektor w i $\mathbb{R}^4$ tilhører underrummet span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Ja, da de alle er lineært uafhængige, så udspænder de 4 dimensioner, hvilket altså er det samme som $\mathbb{R}^4$.

### 8. den lineære operator $T$ på $\mathbb{R}^4$ med standardmatricen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$ er surjektiv?

Ja, da $A$ er en $4 \times 4$ matrix, og alle søjlerne er lineært uafhængige, så er der altså pivot i alle rækker. Da der er i pivot i alle rækker, er den surjektiv. Da der også er pivot i alle søjler, er den injektiv. Da den både er injektiv og surjektiv er den bijektiv. Det var bare en ekstra information sponsoreret af ingen andre end undertegnet.

# Problem 11

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Er det sandt, at

## 1. $A$ og $B$ er inverse til hinanden?

Nej, vi kan bruge invers-formlen til $2 \times 2$-matricer. Så $A$ skal have invers:

$$A^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 3 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \neq B$$

Der er en konstant til forskel. Vi kunne også bare have tjekket determinanterne, da

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1,$$

Men da både $A$ og $B$ er øvre trekantsmatricer, kan vi blot gange diagonalen sammen, og får: $\det A = 5 \cdot 1 = 5$ og $\det B = 5 \cdot 1 = 5$. Da

$$\det A \cdot \det B = 5 \cdot 5 = 25 \neq 1,$$

kan de altså ikke være inverse.

## 2. $C$ og $D$ er inverse til hinanden?

Vi kan prøve determinant-reglen her, men vi får intet ud af den, da:

$$\det C = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

og

$$\det D = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

hvilket betyder

$$\det C \cdot \det D = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1.$$

Så på den front er det godkendt. Men det betyder ikke, at de er hinandens inverse. Diagonalen giver 1-taller, som de skal. I stedet for at udregne hele matrix-produktet, så vælger jeg at gange række 1 i $C$ og søjle 2 i $D$ sammen (jeg har spottet, at det giver noget, jeg gerne vil have):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Da vi ikke er på diagonalen med række 1 og søjle 2, så skulle denne indgang gerne være 0, hvis $C$ og $D$ skulle være inverse til hinanden. Men værdien er $-1$, hvilket ikke er 0, hvorfor de ikke kan være inverse.

Hvis de havde været inverse, så blev jeg nødt til at gange dem sammen (eller rækkereducerer mig frem til et svar), men det var lige nemt at spotte, at de ikke var inverse.

### 3. $A$ er inverterbar?

Ja, determinanten er ikke 0. Altså er den inverterbar.

### 4. $B$ er diagonaliserbar?

Ja, da $B$ er en trekantsmatrix, kan vi aflæse egenværdierne direkte på diagonalen. Det vil sige, at $B$ har 2 forskellige egenværdier. Hver egenværdi har ALTID mindst 1 egenvektor, hvilket vil sige, at hver forskellig egenværdi tilhører et egenrum med dimension på mindst 1. Det giver sammenlagt dimension 2, da der er to forskellige egenværdier. En matrix er diagonaliserbar, hvis egenvektorerne udspænder en dimension svarende til rangen af matricen. Dette er tilfældet her. Så ja, $B$ er diagonaliserbar.

### 5. Marker den eller de matricer, som $B$ er similær med.

En matrix er similær med en anden, hvis deres determinanter ens. Det er ret let at se, at dette er tilfældet for alle matricerne givet i denne opgave.

### 6. $C$ er diagonaliserbar?

Ja, igen kan egenværdierne aflæses på diagonalen, da det er en trekantsmatrix. Disse er 1, 2 og 4, hvilket betyder, at vi har tre forskellige egenværdier for en matrix med rang 3. Derfor er $C$ diagonaliserbar.

### 7. $D$ er diagonaliserbar?

Ja, med samme grund som $C$ og $B$. Dette er dog med egenværdierne 1, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$.

### 8. Marker den eller de diagonalmatricer, som $D$ er similær med.

En matrix er similær med en anden, hvis deres determinanter ens. Da det kun er diagonalmatricer, vi kigger på, kan vi blot vælge de matricer, som har samme tal stående på diagonalen (ligegyldig rækkefølge) som $D$. Derfor vælger vi kun matrix 2 og 3.

# Problem 12

Marker de af matricerne nedenfor, som har tallene 2, 3 og 7 som egenværdier.

**1.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dette er en diagonalmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Men der findes kun 2, ikke 3 eller 7. Så denne passer ikke.

**2.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dette er en diagonalmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Men der findes kun 3, ikke 2 eller 7. Så denne passer ikke.

**3.** $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Dette er en diagonalmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Men der findes kun 7, ikke 2 eller 3. Så denne passer ikke.

**4.** $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dette er en diagonalmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Vi aflæser både 7, 2 og 3. Denne passer altså.

**5.** $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dette er en trekantsmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Vi aflæser både 7, 2 og 3. Denne passer altså.

**6.** $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Dette er en trekantsmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Men der findes kun 7, ikke 2 eller 3. Så denne passer ikke.

**7.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

Dette er en trekantsmatrix, så vi kan blot aflæse egenværdierne. Vi aflæser både 7, 2 og 3. Denne passer altså.

**8.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

Jeg bruger kofaktormetoden:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 7 & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 7 & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left((-\lambda)(-\lambda) - 3 \cdot 7\right) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 21\right).$$

Vi kan sagtens aflæse den ene egenværdi til 2. Andengradspolynomiet giver svarene:

$$\lambda = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{4}\sqrt{21}}{2} = \pm\frac{2\sqrt{21}}{2} = \pm\sqrt{21}.$$

Så de to andre egenværdier er plus og minus kvadratroden af 21. Men kvadratroden af 21 er hverken 7 eller 3, så denne passer altså ikke.

**9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En anden måde at afgøre, om 2, 3 og 7 er egenværdier på, er at trække dem fra diagonalen en af gangen. De tre matricer skal så alle have determinant 0. Eksempel:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7-2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bruger kofaktormetoden, hvor jeg itererer over 2 anden søjle:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 7 \det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 7 \cdot (-2 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = 7 \cdot (-4 - 6) = 7 \cdot -10 = -70.$$

Vi ved, at $-70 \neq 0$, derfor kan 2 ikke være en egenværdi. Så denne matrix går ikke.

**10.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & -5 & 12 \end{bmatrix}$

Vi prøver igen metoden, hvor vi trækker egenværdierne fra diagonalen.

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 0 & 0 \\ 0 & -3-2 & 10 \\ 0 & -5 & 12-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten af denne er klart 0. Så indtil videre kan vi kun konkludere, at 2 er en egenværdi. Det er også ret let at se, at 3 er en egenværdi, eftersom hvis vi trækker denne fra på diagonalen, så bliver en hel søjle til 0'er (og faktisk) også en række, da vi kan iterere over enten første søjle eller første række:

$$\det\begin{bmatrix}3-3 & 0 & 0\\ 0 & -3-3 & 10\\ 0 & -5 & 12-3\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 10\\ 0 & -5 & 9\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}-6 & 10\\ -5 & 9\end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix}0 & 0\\ -5 & 9\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0 & 0\\ -6 & 10\end{bmatrix} = 0.$$

Det var en udspensling af, hvorfor I skal stole på mig, når jeg siger, at det er nemt at se. Hvis en hel række eller søjle er 0, når en værdi er trukket fra på diagonalen, så er værdien en egenværdi.

Vi prøver nu med 7:

$$\begin{bmatrix}3-7 & 0 & 0\\ 0 & -3-7 & 10\\ 0 & -5 & 12-7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 10\\ 0 & -5 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}} r_2 \to r_2 \begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dette giver igen en nul-determinant. Altså er både 2, 3 og 7 egenværdier for denne matrix.

**11.** $\begin{bmatrix}7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$

Lad os prøve at udregne egenværdierne for denne igen, nu hvor det er så små tal:

$$\det\begin{bmatrix}7-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 6 & 0\\ 0 & -1 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7-\lambda\end{bmatrix} = (7-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 6 & 0\\ -1 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 7-\lambda\end{bmatrix}$$
$$= (7-\lambda)^2\det\begin{bmatrix}-\lambda & 6\\ -1 & 5-\lambda\end{bmatrix} =$$
$$(7-\lambda)^2\left((-\lambda)(5-\lambda) - 6\cdot(-1)\right) =$$
$$(7-\lambda)^2(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Vi finder rødderne i andengradspolynomiet:

$$\lambda = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases}3\\ 2\end{cases}.$$

Så både 7, 3 og 2 er altså egenværdier. Fun fact: 7 har multiplicitet 2.

**12.** $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & -5 & 0 \\ 0 & 100 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Det er let at se, at 7 og 3 er egenværdier. Så vi skal blot tjekke, at 2 også er en egenværdi. Vi trækker 2 fra på diagonalen og får:

$$\begin{bmatrix} 7-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27-2 & -5 & 0 \\ 0 & 100 & -18-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 100 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 4r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diskriminanten af denne er helt klar 0. Derfor er 2 også en egenværdi. Matricen har altså 2, 3 og 7 som egenværdier.