Besvarelser til Lineær Algebra Reeksamen - 19. August 2016

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1 **3**

Problem 2 **4**

Problem 3 **5**

Problem 4 **6**

Problem 5 **8**

Problem 6 **9**

Problem 7 **10**

Problem 8 **11**

Problem 9 **12**

Problem 10 **13**

Problem 11 **14**

Problem 12 **15**

Problem 13 **17**

Problem 14 **18**

Problem 1

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvad er determinanten af A?

Svar:

Vi benytter kofaktormetoden, hvilken vil varierer over 3. søjle. Dvs. vi har (grundet 0-indgangene forsvinder):

$$\det A = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

For at finde determinanten af den matrix i ovenstående udtryk kan vi igen anvende kofaktormetoden, denne gang i anden søjle. Vi får:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = 2 \cdot 5 = 10.$$

Altså er:

$$\det A = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 10 = 10.$$

Problem 2

Lad A være en 4×6 matrix og lad $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hvordan fremkommer matricen EA fra A?

Svar:

Vi betragter for simplicitetens skyld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ganger sammen:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det ses, at der bliver byttet rundt på anden og fjerde række.

Problem 3

Matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har reduceret trappeform (reduceret række echelon form)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Angiv en basis for søjlerummet af A.

Vi betragter blot, hvilke søjler, der er pivotindgange i matricen på den reducerede trappeform. Disse er søjle nummer 1, 2 og 4. Derfor vælger vi søjle 1, 2 og 4 i A til vores basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Angiv en basis for rækkerummet af A.

Vi transponerer blot den reducerede trappeformsmatrix og får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vælger så de søjler, som var pivotrækker i den rækkereducerede. Vi får en basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Angiv en basis for nulrummet for A.

Den reducerede trappeform giver os ligningssystemet:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= x_3 - x_5 \\ x_3 &= Fri \\ x_4 &= x_5 \\ x_5 &= Fri \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Disse to vektorer udgør altså en basis for nulrummet for A.

Problem 4

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^4$, som opfylder, at $W^\perp = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$, og lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}8\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

1. Hvilken af de angivne mængder er en basis for W?

Vi ser hurtigt, at det angivne span består af uafhængige vektorer (rækkereducer, så der er pivot i hver søjle). Dette betyder, at en basis for W kun må indeholde 1 uafhængig vektor, eftersom vektorerne kun ligger i $\mathbb{R}^4$ og $W^\perp$ allerede udspænder 3 dimensioner. Det ses også hurtigt, at

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

består af 3 uafhængige vektorer, hvorfor dette ikke kan være en basis for W.
En anden måde at benytte er at prikke vektorerne fra den ene mængde med dem i spannet og se, om disse produkter giver 0. Vi har for to udvalgte, at:

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1 \neq 0.$$

Dette prikprodukt er ikke nul, hvilket er påkrævet for, at de lægger i hvert deres ortogonale komplement.

På tilsvarende måde kan det tjekkes for $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$. Vi får:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 1 - 2 + 0 + 0 = -1 \neq 0.$$

Altså er denne heller ikke ortogonal på hele spannet. Altså må det være sidste svarmulighed, men vi regner lige efter for en sikkerheds skyld:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 - 1 + 0 + 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 + 0 + 1 - 1 + = 0$$

Denne er ortogonal på alle vektorerne i spannet af $W^\perp$, hvorfor denne må udgøre basis for W.

2. Lad nu w være den ortogonale projektion af u på W. Hvad er 4. komponenten af w (dvs. w_4)?

Vi bruger formlen

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1,$$

hvor $\mathbf{v}_1$ er basisvektoren for W fundet i den forrige opgave. Vi finder længden og prikproduktet:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}^2 = 1^2+1^2+1^2+1^2 = 4, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}8\\0\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = 8 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 8.$$

Vi har nu, at

$$\mathbf{w} = \frac{8}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}.$$

Altså er $w_4 = 2$.

3. Lad z være den ortogonale projektion af u på $W^\perp$. Hvad er 4. komponenten af z (dvs. z_4)?

Vi har at:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{w} \Rightarrow z_4 = u_4 - w_4 = 0 - 2 = -2.$$

Problem 5

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \mathbf{a}_3]$ være en matrix med 2 rækker, og lad $B = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \mathbf{b}_3 \ \ \mathbf{b}_4]$ være en matrix, som opfylder, at $C = AB$ er defineret.

1. Hvor mange rækker har matricen B?

Vi ved, at A er en (2×3)-matrix. Ydermere er B en $m \times 4$-matrix. Hvis vi skal have, at AB er defineret, skal $m = 3$ før $AB = (2 \times 3)(m \times 4)$ er defineret.

2. Hvor mange rækker har matricen C?

$$C = AB = (2 \times 3)(3 \times 4) = 2 \times 4.$$

Altså har C 2 rækker. Da A står længst til venstre er C's rækkeantal bestemt af A.

Problem 6

Det karakteristiske polynomium af

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

er $-(t+1)(t^2-6t+2)$.

1. Angiv en egenværdi for A.

Egenværdier er de værdier af t, der får det karakteristiske polynomium til at blive 0. Vi ser altså, at hvis $t=-1$ bliver parentesen $(t+1)=0$, hvorfor hele polynomiet bliver 0. Dermed er -1 en egenværdi for A.

2. Hvilken af følgende er en egenvektor for A?

Nulvektoren kan ikke være en egenvektor pr. definition.

Egenvektorer $\mathbf{v}$ opfylder $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vi regner:

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2 \\ 2\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1+2 \\ 2+2+6 \\ 4+3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan ikke finde et λ, der opfylder dette. Altså er denne ikke en egenvektor.

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ 1\cdot 0+2\cdot(-1)+3\cdot 1 \\ 2\cdot 0+3\cdot(-1)+2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1+1 \\ 0-2+3 \\ 0-3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Altså er $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor med egenværdien -1.

3. Kan A diagonaliseres?

Vi finder finder diskriminanten for andengradspolynomiet t^2-6t+2, som er den ene parentes i det karakteristiske polynomium:

$$D = (-6t)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 36-8 = 28.$$

Da diskriminanten er forskellig fra 0, har egenværdierne kun multiplicitet 1 i det karakteristiske polynomium. Derfor er der lige så mange egenvektorer, som der er multiplicitet af egenværdier (da, der altid er minimum én egenvektor pr. egenværdi). Derfor kan A diagonaliseres.

4. Har A en invers?

Ja, da A ikke har 0 som en egenværdi:

$$-(0+1)(0^2-0t+2) = -2 \neq 0.$$

Problem 7

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Lad a være et positivt tal, der opfylder, at $Q = aA$ er en ortogonal matrix. Hvad er værdien af a?

Uden at tjekke må det antages, at søjlerne er indbyrdes ortgogonale, da en konstant ganget på ikke kan ændre dette. Det ses også, at alle søjler har samme længde. Dvs. vi skal blot finde et a, der får længderne til at blive 1. Vi har:

$$a\|\mathbf{v}_1\| = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}.$$

2. Lad nu c være et tal, der opfylder $A^{-1} = cA^\top$. Hvad er værdien af c?

Vi har, da Q er en ortogonal matrix, at:

$$Q^{-1} = Q^\top \Rightarrow \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3}A\right)^\top \Leftrightarrow 3A^{-1} = \frac{1}{3}A^\top \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}A^\top = \frac{1}{9}A^\top.$$

Altså er $c = 1/9$.

Problem 8

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & -4 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

1. Er v indehold i $\operatorname{Col} A$?

Vi skal tjekke om $Ax = \mathbf{v}$ er konsistent:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 7 \\ 7 & 8 & -9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & -6 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet er altså konsistent, hvorfor **v** ligger i $\operatorname{Col} A$.

2. Er v indeholdt i $\operatorname{Null} B$?

Vi ser, om vi ved at udregne $B\mathbf{v}$ får nulvektoren:

$$B\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 7 - 4 \cdot 6 \\ 3 \cdot 0 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 7 - 6 \\ 0 + 14 - 24 \\ 0 + 21 - 30 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Altså er **v** ikke i $\operatorname{Null} B$.

3. Lad $C = AB$. Hvad er værdien af c_{22}?

Vi kan blot gange 2. række fra A sammen med 2. søjle fra B. Vi får:

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 6 + 10 - 12 = 4.$$

Problem 9

1. Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3? \end{aligned}$$

Vi opstiller en matrix for ligningsystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet er konsistent samtidig med, at der er frie variable. Altså er der uendeligt mange løsninger.

2. Hvad er nulliteten af koefficientmatricen?

Koefficientmatricen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi ved, at der er 2 ikke pivot-søjler i denne. Altså er nulliteten 2.

3. Hvad er rangen af koefficientmatricen?

Igen, vi ved, at koefficientmatricen indeholder to pivotsøjler, hvorfor rangen af denne er 2.

Problem 10

Lad A betegne matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 13 & 17 & 19 \\ 9 & 29 & 31 & 37 \end{bmatrix},$$

og lad B være en matrix på trappeform (række echelon form), der er fremkommet fra A ved et antal elementære rækkeoperationer. Hvad er værdien af b_{32}?

Svar:

Svaret er 0. Hvis b_{32} kan ikke være en pivotindgang, da B er på trappeform. Dette betyder, at rækkenummeret som maksimalt må være lig søjlenummeret, hvilket ikke er tilfældet.

Problem 11

Lad A være en 3×2-matrix forskellig fra nulmatricen.

1. Hvad er den mindst mulige rang af $A^\top A$?

Rangen af $A^\top A$ er det samme som rangen af A. Eftersom A er forskellig fra nulmatricen vil denne som minimum have 1 pivotsøjle. Altså er den mindst mulige rang 1.

2. Hvad er den størst mulige rang af $A^\top A$?

Den størst mulige rang af A er 2, derfor er dette også den størst mulige rang af $A^\top A$.

3. Hvad er den størst mulige rang af $AA^\top$?

Se spørgsmål 2.

Problem 12

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

og lad $B = A^{-1}$. Lad desuden C være en 4×4-matrix med $\det C = 4$.

1. Hvad er værdien af b_{41}?

Man kan finde den inverse ved den normale metode ved at rækkereducere $[A|I_4]$. Men det er lidt kedeligt, så jeg spicer tingene op. - Ikke at det nødvendigvis er nemmere.

Vi ved, at

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{bmatrix} = I_4.$$

Jeg noterer A's i'te række ved $\mathbf{a}_i$. Vi ved altså, at:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = I_{11} = 1$$
$$\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{b}_1 = I_{41} = 0$$

Skrives skrives ligningerne ud fås:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1b_{11} + 0b_{21} + 0b_{31} + 0b_{41} = b_{11} = 1$$
$$\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{b}_1 = 6b_{11} + 0b_{21} + 0b_{31} + 3b_{41} = 6b_{11} + 3b_{41} = 6 + 3b_{41} = 0$$

Vi har altså

$$6 + 3b_{41} = 0 \Leftrightarrow b_{41} = -\frac{6}{3} = -2.$$

2. Hvad er determinanten af A?

Da A er en nedre trekantsmatrix, kan vi blot gange diagonalindgangene:

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

3. Hvad er determinanten af $A^\top C$?

Vi bruger regneregler for determinanten:

$$\det(A^\top C) = \det A^\top \det C = \det A \det C = 12 \cdot 4 = 48.$$

4. Hvad er determinanten af AC^{-1}?

Vi bruger regneregler for determinanten:

$$\det AC^{-1} = \det A \det C^{-1} = \det A (\det C)^{-1} = \frac{\det A}{\det C} = \frac{12}{4} = 3.$$

5. Hvad er determinanten af $-2C$?

Vi bruger regneregler determinanten. Husk, at C er en 4×4-matrix:

$$\det(-2C) = (-2)^4 \det C = 16 \det C = 16 \cdot 4 = 64.$$

Problem 13

Lad $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er værdien af m?

m er antallet af søjler i standardmatricen. Derfor er $m = 4$.

2. Hvad er værdien af n?

n er antallet af rækker i standardmatricen. Derfor er $n = 3$.

3. Er T surjektiv (engelsk: onto)?

T er surjektiv, hvis der er pivotindgange i alle rækker. Dette ses straks er tilfældet for den givne standardmatrix. Hvorfor T er surjektiv.

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af T?

Spørgsmålet kan omformuleres til: "Hvor mange søjler er ikke pivotsøjler?". Da der er 3 pivotrækker, er der 3 pivotsøjler. Der er 4 søjler i alt, altså er dimensionen af nulrummet lig 1.

Problem 14

Følgende indtases i MATLABs command window: » `A = [2 0 1; -1 2 1; 1 2 2; 1 0 0]`
» `B = [2; 1; 3; 0]`
» `rref([A b])`

`ans =`

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 2.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

» `linsolve(A,b)`
Hvad er MATLABs svar på sidstnævnte kommando?

Svar:

`linsolve` returnerer værdierne for variablene x_1, x_2 og x_3, hvilke præcis er dem, der står i sidste søjle af det output, `rref([A b])` giver. Bemærk dog, at den sidste række i sidste søjle ikke medtages, da denne ikke knytter sig til en variabel (vi har kun 3 variable, men 4 rækker).

$$\texttt{ans =} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.5000 \\ 2.0000 \end{bmatrix}.$$