Læresætninger - Gymnasienoter

Mikkel Findinge
http://Findinge.com/

Tag forbehold for eventuelle fejl/typos.

Indhold

Forord

Disse noter er udelukkende til gymnasielle beviser, hvorfor begreber antages for kendte. Ydermere er sætningerne simplificeret til at matche gymnasieniveau.

Kvadratsætningerne

Kvadratsætningerne er nogle af de mest basale regneregler vedrørende multiplikation af (næsten) identiske parenteser.

Sætning 1.1: Kvadratsætning 1

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Bevis
Udtrykket splittes først op i to parenteser, og derefter ganges hvert led i den ene parentes ind på hvert led i den anden parentes:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a \cdot a+a \cdot b+b \cdot a+b \cdot b = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+b^2+2ab.$$

Husk, at $a \cdot b = b \cdot a$. ■

Sætning 1.2: Kvadratsætning 2

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Bevis
Fremgangsmåden er den selvsamme som ved kvadratsætning 1. Her skal vi blot holde øje med et minus.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b)-b(a-b) = a \cdot a+a \cdot (-b)-b \cdot a-b \cdot (-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2+b^2-2a$$

Husk, at $a \cdot b = b \cdot a$ samt $(-b)(-b) = b \cdot b = b^2$. ■

Sætning 1.3: Kvadratsætning 3

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Bevis
Vi ganger her blot den ene parentes ind i den anden. Vi har

$$(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b) = a \cdot a+a \cdot (-b)+b \cdot a+b \cdot (-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2.$$

Husk, at $a \cdot b = b \cdot a$. ■

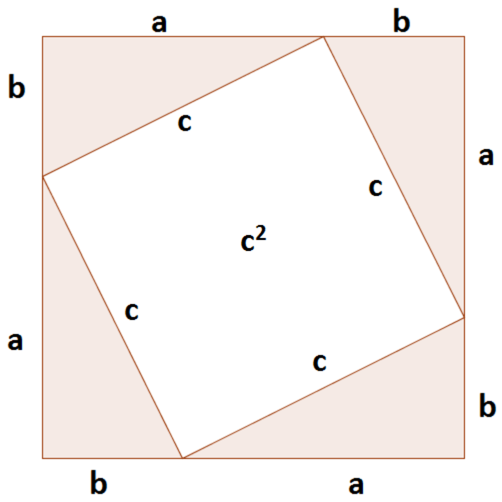
Pythagoras' læresætning

Sætning 1.4: Pythagoras' læresætning

Lad a og b være længden af kateterne og c være længden af hypotenusen i en retvinklet trekant. Da gælder

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bevis
Vi starter med at betragte kvadratet i figuren herunder.



Figur 1.1: Et kvadrat med sidelængderne $(a + b)$ og et med sidelængderne c.

Vi har med 4 trekanter af samme størrelse, nemlig katete-længderne a og b, frembragt to kvadrater. Et stort kvadrat med sidelængderne $a + b$ og et lille kvadrat indeni, der har sidelængderne c, som er samme længde som hypotenusen af trekanterne. Vi kan altså udregne arealet af det store kvadrat som en hver anden firkant - ved at gange sidelængderne:

$$A_{\text{Stor}} = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

hvor sidste lighed opnås ved første kvadratsætning.

Vi kan yderligere finde det samlede areal af de 4 trekanter:

$$A_{\text{Trekanter}} = 4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2ab.$$

Dette areal fremkommer ved at gange med 4 på en enkelt trekants areal, da en sådan er givet ved en halv (1/2) højde ganget bredde (begge kateter ganget sammen).

Pythagoras er næsten bevist, vi mangler dog blot at finde udtrykket for c^2, hvilket er arealet for det lille kvadrat i midten. Hvis der igen kigges på figuren fra start, så kendes nu det samlede areal for det store kvadrat, samt det samlede areal for trekanterne. Trækkes trekanternes samlede areal fra det store kvadrats areal, så vil kun arealet for det lille kvadrat være tilbage, hvilket altså vil give et udtryk for c^2. Vi har altså:

$$c^2 = A_{\text{Stor}} - A_{\text{Trekanter}} = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2.$$

Dermed er Pythagoras' læresætning bevist, da $c^2 = a^2 + b^2$ er det samme som $a^2 + b^2 = c^2$. ∎