Andengradspolynomier - Gymnasienoter

Mikkel Findinge
http://Findinge.com/

Tag forbehold for eventuelle fejl/typos.

Indhold

Forord

Disse noter er udelukkende til gymnasielle beviser, hvorfor begreber antages for kendte. I disse notater beskæftiger vi os udelukkende med de reelle tal, $\mathbb{R}$, hvorfor dette ikke specificeres i sætningerne.

Toppunktsformlen - Bevismetode 1

Sætning 1.1: Toppunktsformlen

For et andengradspolynomium

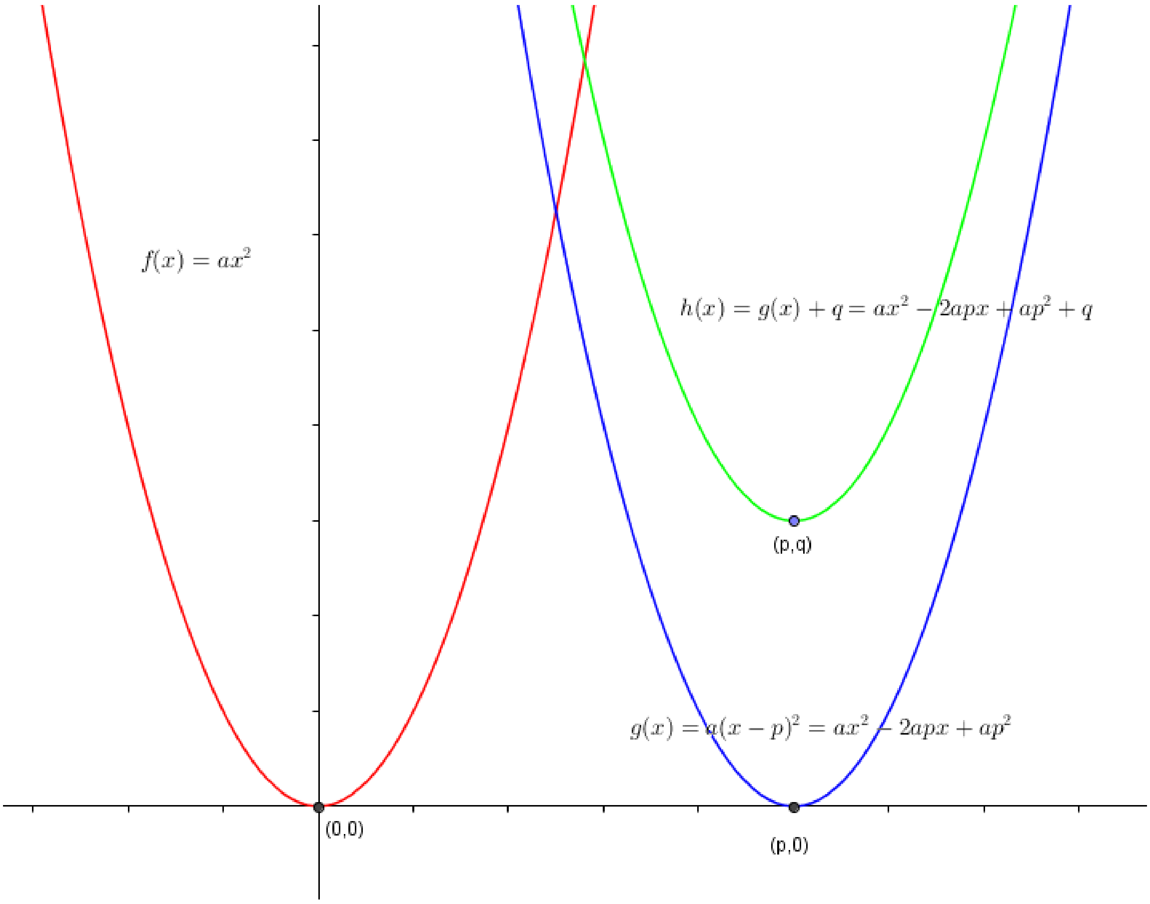
$$y = ax^2 + by + c, \quad a \neq 0,$$

er toppunktet T givet ved

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right),$$

hvor D er diskriminanten.

Bevis
Nedenfor ses en grafisk opstilling af beviset.



Figur 1.1: Parallelforskydning af parabel.

Betragt først andengradspolynomiet givet ved forskriften $f(x) = ax^2$.[1] Denne funktion har toppunkt i $(0,0)$, da værdier, der ikke er nul - både negative og positive, vil resultere i en større funktionsværdi for et positivt a samt en mindre funktionsværdi for et negativt a.

Vi parallelforskyder nu f ved at flytte toppunktet en længde p ad x-aksen. Parallel-

[1]Dette er den røde graf i Figur 1.1 - ganske vist for positivt a, men beviset er generelt.

forskydningen er funktionen g givet ved

$$g(x) = a(x-p)^2.$$

Af dette følger

$$g(p+k) = a\left((p+k)-p\right)^2 = ak^2 = f(k).$$

Dette betyder, at hvis vi bevæger os en længde k væk fra $(p,0)$ i g, så er det præcis den samme værdi, som hvis vi bevæger os en længde k væk fra 0 i f. Dermed har g og f samme form - de befinder sig blot to forskellige steder i koordinatsystemet, hvorfor toppunktet for g dermed findes i punktet $(p,0)$. Vi kan yderligere omskrive g og få:

$$g(x) = a(x-p)^2 = ax^2 - 2apx + ap^2.$$

Vi kan parallelforskyde g ud ad $y-aksen$ ved blot at lægge en konstant q til, hvorfor punktet (p,q) bliver toppunktet. Denne parallelforskydning benævnes h og er givet ved:

$$h(x) = g(x) + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q \tag{1.1}$$

Nu har vi et udtryk for parabler, hvis toppunkt er kendt. Vi bemærker, hvordan hvert led i (1.1) kan relateres til standardformen for andengradspolynomiet, $y = ax^2 + bx + c$, og opstiller udtrykkende:

$$b = -2ap, \qquad c = ap^2 + q.$$

Vi vil nu finde udtryk for p og q. Vi finder p i første udtryk:

$$b = -2ap \Leftrightarrow p = -\frac{b}{2a}.$$

Det vil sige, at x-koordinatet for toppunktet i en andengradsligning kan findes ved $-b/(2a)$.

Vi har nu et udtryk for p, hvorfor vi blot kan isolere q i $c = ap^2 + q$ og erstatte p med det fundne udtryk:

$$\begin{aligned}
c &= ap^2 + q \Leftrightarrow \\
q &= c - ap^2 \\
&= c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= c - a\frac{b^2}{4a^2} \\
&= c - -\frac{b^2}{4a} \\
&= \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} \\
&= \frac{4ac - b^2}{4a} \\
&= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= \frac{-D}{4a},
\end{aligned}$$

hvor $D = b^2 - 4ac$ er diskriminanten. Vi har nu bevist sætningen, da $(p,q) = (-b/(2a), -D/(4a))$ er toppunktet. ■

Toppunktsformlen - Bevismetode 2

Sætning 1.2: Toppunktsformlen

For et andengradspolynomium

$$y = ax^2 + by + c, \quad a \neq 0,$$

er toppunktet T givet ved

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right),$$

hvor D er diskriminanten.

Bevis

Vi betragter andengradspolynomiet $f(x) = ax^2+bx+c$. Denne differentieres i forhold til x:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Sættes dette lig 0 betragtes lokale ekstremumspunkter, dvs. toppunktet for andengradspolynomiet. Vi kan altså blot isolere x i $f'(x) = 0$ for at finde x-koordinatet for toppunktet:

$$2ax_0 + b = 0 \Leftrightarrow 2ax_0 = -b \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Dette kan nu indsættes i f:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= ax_0^2 + bx_0 + c \\
&= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= \frac{-D}{4a}
\end{aligned}$$

Toppunktet har altså koordinaterne:

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, \quad -\frac{D}{4a}\right).$$

■

Andengradspolynomiets symmetri

Sætning 1.3: Symmetrien af andengradspolynomiet

Ethvert andengradspolynomium kan spejles i den lodrette linje, der går gennem toppunktet.

Bevis
Vi har af toppunktsformlen, at

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

for et andengradspolynomium, $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $D = b^2 - 4ac$ er diskriminanten. Sætningen siger, at hvis T_x er toppunktets x-koordinat, så vil $f(T_x - k) = f(T_x + k)$ uanset valget af k. Dette er, hvad vi skal vise, hvilket vi bruger toppunktsformlen til. Vi betragter først, hvor vi har lagt k til[2]

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a} + k\right) &= a\left(-\frac{b}{2a} + k\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + k\right) + c \\
&= a\left(\frac{b^2}{(2a)^2} + k^2 + 2\frac{b}{2a}k\right) - \frac{b^2}{2a} - bk + c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + k^2 + \frac{bk}{a}\right) - \frac{b^2}{2a} - bk + c \\
&= a\frac{b^2}{4a^2} + ak^2 + a\frac{bk}{a} - \frac{b^2}{2a} - bk + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + ak^2 + bk - \frac{b^2}{2a} - bk + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + ak^2 - \frac{2b^2}{4a} + c
\end{aligned}$$

Bemærk, at vi har brugt kvadratsætningerne, samt at

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Vi kunne have lavet flere omskrivninger og opnå, at $f(-\frac{b}{2a} + k) = ak^2 - \frac{D}{4a}$, men dette er unødvendigt, da vi blot skulle vise ligheden $f(T_x - k) = f(T_x + k)$. Vi betragter nu $f(T_x - k)$ og får:

[2] Bemærk, man kan udføre beviset kort med $\pm$, men for uindviede kan dette virke besværligt og uoverskueligt!

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}-k\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}-k\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}-k\right)+c \\
&= a\left(\frac{b^2}{(2a)^2}+k^2+2\frac{b}{2a}(-k)\right)-\frac{b^2}{2a}-b(-k)+c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2}+k^2-\frac{bk}{a}\right)-\frac{b^2}{2a}+bk+c \\
&= a\frac{b^2}{4a^2}+ak^2-a\frac{bk}{a}-\frac{b^2}{2a}+bk+c \\
&= \frac{b^2}{4a}+ak^2-bk-\frac{b^2}{2a}+bk+c \\
&= \frac{b^2}{4a}+ak^2-\frac{2b^2}{4a}+c
\end{aligned}$$

Dette er altså præcis det samme, som vi fik i udregningerne for $f(T_x+k)$, hvormed $f(T_x-k)=f(T_x+k)$. ■

Rodfaktorisering

Sætning 1.4: Rodfaktorisering

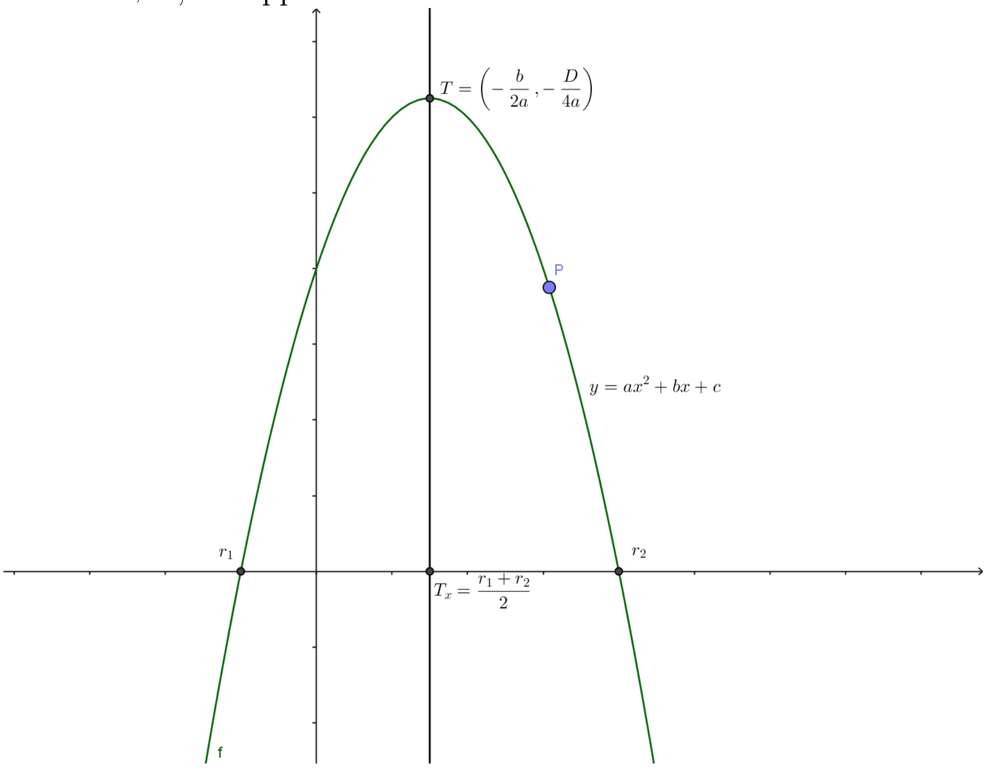
Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ have rødderne r_1 og r_2. Da kan f skrives som

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Ydermere, hvis f kun har én rod, kan forskriften rodfaktoriseres ved

$$f(x) = a(x - r_1)^2.$$

Bevis
Dette er et konstruktivt bevis og kan gøres meget kortere med modstrid. Vi betragter først et andengradspolynomium med to rødder, men erstattes alle r_2 med r_1 i nedenstående bevis bliver tilfældet for en enkelt rod også vist. Dette bliver klart, da én rod vil medføre, at toppunktet er roden.



Figur 1.2: Andengradspolynomium samt resultater.

Figur 1.2 viser, hvad vi allerede ved, nemlig at punkterne $(r_1, 0)$ og $(r_2, 0)$ er rødderne. Sætning 1.3 sikrer os symmetri ved andengradspolynomiet, hvorfor vi ved, at

$$T_x = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

er x-koordinaet for toppunktet, da dette må ligge lige i mellem rødderne. Ydermere giver toppunktsformlen:

$$T_x = -\frac{b}{2a}.$$

Disse to udtryk kan nu sættes lig med hinanden, da T_x er lig med dem begge, hvori et udtryk for b findes:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{r_1 + r_2}{2} \Leftrightarrow b = -a(r_1 + r_2).$$

Da r_1 og r_2 er rødder og dermed har $f(r_1) = f(r_2) = 0$, vil følgende andengradsligning kunne opstilles:

$$f(r_1) = ar_1^2 + br_1 + c = 0.$$

Heri kan c så isoleres, hvilket giver:

$$c = -ar_1^2 - br_1.$$

Værdien, der blev fundet for b tidligere, kan nu indsættes i stedet for b, hvilket giver et udtryk, der kan reduceres:

$$\begin{aligned} c &= -ar_1^2 - (-ar_1(r_1 + r_2)) \\ &= -ar_1^2 + ar_1(r_1 + r_2) \\ &= -ar_1^2 + ar_1^2 + ar_1r_2 \\ &= ar_1r_2 \end{aligned}$$

Vi betragter igen forskriften for f:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Denne kan omskrives ved at indsætte de fundne udtryk for b og c:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - a(r_1 + r_2) \cdot x + ar_1r_2.$$

Hernæst sættes a uden for parentes, hvorefter det indvendige kan faktoriseres ved brug af en kvadratsætning. Dette giver os:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - a(r_1 + r_2) \cdot x + ar_1r_2 \\ &= a\left(x^2 - x(r_1 + r_2) + r_1r_2\right) \\ &= a(x - r_1)(x - r_2) \end{aligned}$$

Det er altså nu bevist, at $f(x) = ax^2 + bx + c$ også kan skrives som $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. ■

Rødder i andengradspolynomiet

I starten af gymnasiet får man ofte præsenteret et bevis for, hvor rødderne findes i et andengradspolynomium. Dette bevis lægger nogle værdier til og trækker andre fra på begge sider i polynomiet, og mange bliver lettere forvirret over dette på trods af, at metoden blot sigter efter at anvende en kvadratsætning. Jeg vil dog tage et alternativt bevis op her, som anvender symmetrien fra Sætning 1.3.

Sætning 1.5: Rødder i andengradspolynomiet

Lad f være givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

samt $D = b^2 - 4ac$ være diskriminanten. Da findes der tre muligheder:

- $D > 0$: Der findes 2 rødder givet ved $x = \pm\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.
- $D = 0$: Der findes 1 rod givet ved $x = -\frac{b}{2a}$.
- $D < 0$: Der findes ingen reelle rødder.

Bevis
Vi ved, at andengradspolynomiet er symmetrisk omkring toppunktet, hvorfor vi kan finde den konstant k som kan lægges til og trækkes fra toppunktet for at opnå en rod. Vi betragter:

$$f\left(-\frac{b}{2a} \pm k\right) = 0.$$

Her er k ukendt og $-\frac{b}{2a}$ er blot x-koordinatet for toppunktet. Vi har altså en ligning at betragte. Vi får ved brug af en kvadratsætning:

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a} \pm k\right) &= a\left(-\frac{b}{2a} \pm k\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} \pm k\right) + c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + k^2 \pm 2\left(-\frac{b}{2a}\right)k\right) - \frac{b^2}{2a} \pm bk + c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + k^2 \mp \frac{bk}{a}\right) - \frac{b^2}{2a} \pm bk + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + ak^2 \mp bk - \frac{b^2}{2a} \pm bk + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + ak^2 - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= ak^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= ak^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= ak^2 - \frac{D}{4a} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vi betragter nu blot $ak^2 - D/(4a) = 0$, hvori vi finder et udtryk for k:

$$ak^2 - \frac{D}{4a} = 0 \Leftrightarrow ak^2 = \frac{D}{4a} \Leftrightarrow k^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Hvis D er negativ, findes der ingen reel løsning til k, da k^2 og a^2 ikke kan være negative. Hvis $D \geq 0$ kan vi løse for k:

$$k^2 = \frac{D}{4a^2} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Bemærk, at vi betragtede $f\left(-\frac{b}{2a} \pm k\right)$, hvor k altså er afvigelsen fra toppunktets x-koordinat. Det vil sige, at roden findes i k plus toppunktets x-koordinat:

$$x = T_x + k = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Vi har nu bevist sætningen. ■