Eksponentielt aftagende frafald

Mikkel Findinge

Kapitel 1

Problemet og svar

1.1 Introduktion

Nogle matematik-studerende diskuterede, hvorvidt en frafaldskurve for matematikstuderende var eksponentielt aftagende, hvis antallet af studerende også var eksponentielt aftagende. Dette var ganske vist ud fra et datamæssigt perspektiv. Hvis data passer en eksponentiel aftagende funktion, så kan dette dog arbejdes med bevismæssigt. Diskussioner med heuristiske argumenter frem for faktiske beviser irriterer mig. Derfor skal dette dokument se, hvordan punkter egentlig ligger, når vi betragter endelig ækvidistant tid, når vi smækker en enkelt antagelse om eksponentiel aftagning ind.

1.2 Non-heuristical-bullshit

Lad n_t være antallet af studerende til tidspunkt $t \in \mathbb{N}$ og sæt $n = n_0$ til at være start-antallet af studerende. Bemærk, at t ikke kan være 0, hvorfor $n_0 = n$ blot er af notationsmæssige årsager. Lad endvidere F_t være antallet af frafald i tidsrummet $]t-1, t]$ for $t > 0$. Det ses, at F_0 ikke giver mening at medtage på lige fod med de andre intervaller, da dette foregår FØR, vi overhovedet har introduceret startantallet. Vi lader dog af notationsmæssige årsager $F_0 = 0$. Vi kan altså skrive

$$n_t = n - \sum_{i=0}^{t} F_i.$$

Bytter vi lidt rundt opnås

$$F_t = n - n_t - \sum_{i=0}^{t-1} F_i.$$

Lad os udregne for nogle konkrete værdier af t:

$$\begin{aligned}
F_1 &= n - n_1 - F_0 = n - n_1 \\
F_2 &= n - n_2 - (F_1 + F_0) = n - n_2 - (n - n_1) = n_1 - n_2 \\
F_3 &= n - n_3 - (F_2 + F_1 + F_0) = n - n_3 - ((n_1 - n_2) + (n - n_1)) = n_2 - n_3 \\
&\vdots \\
F_t &= n_{t-1} - n_t
\end{aligned}$$

Vi antager nu, at antallet af studerende er eksponentielt aftagende. Det vil sige, at

$$n_t = \beta e^{\alpha t}, \qquad \beta > 0, \alpha < 0.$$

Dette betyder endvidere, at

$$n = n_0 = \beta.$$

Bemærk, at jeg sagde, at t ikke kunne være 0. Men vi har blot lavet en grænseudvidelse af vores antals-funktion, da denne er kontinuert. Derfor skriver vi blot

$$n_t = ne^{\alpha t}.$$

Vi kan nu indsætte i det udtryk, vi fandt for F_t tidligere:

$$F_t = n_{t-1} - n_t = ne^{\alpha(t-1)} - ne^{\alpha t} = n\left(e^{\alpha t - \alpha} - e^{\alpha t}\right) = n\left(e^{\alpha t}e^{-\alpha} - e^{\alpha t}\right) = n\left(e^{-\alpha} - 1\right)e^{\alpha t}.$$

Parentesen er nu en konstant, og så længe $\alpha < 0$, som vi har antaget ved eksponentiel aftagning, så vil parentesen også være positiv. Altså kan vi skrive $\beta_{ny} = n(e^{-\alpha} - 1)$, hvorfor

$$F_t = \beta_{ny} e^{\alpha t}.$$

Dette er altså en ny eksponentielt aftagende funktion. Så frafaldet er også eksponentielt aftagende.

1.3 Eksempel

Lad os prøve et eksempel med $n = 256$ og $\alpha = -\log 2$. Så er vores eksponentielle funktion for antallet af et eller andet til tiden t givet ved

$$n_t = 256e^{-\log 2t} = \frac{256}{2^t}.$$

Fedt. Så kan vi bare udregnet, hvor mange der er til hvert tidspunkt. Vi har

$$\begin{aligned} n_0 &= 256 \\ n_1 &= 128 \\ n_2 &= 64 \\ &\vdots \\ n_8 &= 1 \end{aligned}$$

Men det var antallet (af eksempelvis studerende). Hvad så med frafaldet? Jamen der smider vi bare n og α ind i

$$F_t = n(e^{-\alpha} - 1)e^{\alpha t}$$

og opnår dermed

$$F_t = \frac{256}{2^t}.$$

Men dette er præcist samme funktion som tidligere. Så vi har egentligt udregnet alle vores F_t-værdier. Skal vi så lige tjekke, om det stemmer over ens med n_t, det tror jeg nok, vi skal. Husk, vi skal bruge $n_t = n - F_t^+$, hvor F_t^+ er F_i kummuleret for $i = 0, \ldots, t$.

$$
\begin{aligned}
n_0 &= 256 - F_0 = 256 \\
n_1 &= 256 - F_1^+ = 256 - 128 = 128 \\
n_2 &= 256 - F_2^+ = 256 - (128 + 64) = 64 \\
&\vdots \\
n_8 &= 256 - F_8^+ = 256 - (128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1) = 1.
\end{aligned}
$$

Det er et meget flot eksempel. Er vi blevet klogere? Ikke vanvittigt. Skal vi diskutere ting fremadrettet uden at lave beviser, når det er muligt at konstruere beviser. Nej. Lav beviser.