Heltalsdivision med 3 og 9

Mikkel Findinge
http://Findinge.com/

Tag forbehold for eventuelle fejl/typos.

Heltalsdivision med 3 og 9

Definition 1.1: Tværsum

Lad $A \in \mathbb{N}$ være udtrykt ved $A = a_0 + a_1 10 + a_2 100 + \ldots + a_n 10^n$, for $a_i \in$. Da kaldes summen af koefficienterne a_i for tværsummen af A. Altså:

$$\text{Tværsum af A} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Eksempelvis kan tallet 231 skrives som $1 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 100$. Derved er tværsummen af 231 lig $1 + 3 + 2 = 6$.

Definition 1.2: Deleligt

Lad $A \in \mathbb{N}$. Hvis

$$\frac{A}{p} = q$$

for $p, q \in \mathbb{N}$, siges A at være delelig med p.

Dette kan også skrives $A = pq$, hvor $p, q \in \mathbb{N}$. Dermed kan vi sige, at A både er delelig med p og q.

Sætning 1.1: Heltalsdivision med 9

Lad $A \in \mathbb{N}$ være delelig med 9. Da er tværsummen af A også delelig med 9.

Bevis

Da A er et heltal, kan det skrives som

$$A = \sum_{k=1}^{n} \left(10^{k-1} \cdot k - 1\right) = 10^{n-1} a_{n-1} + .. + 10^1 a_1 + 10^0 a_0,$$

hvor $a_k \in \mathbb{N}$ og $0 \leq a_i \leq 9$, for $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Bemærk, at vi lader k starte fra 1 og ikke 0, hvorfor vi ser $k - 1$ i udtrykket.

Vi trækker nu summen af alle a_i, for $i = 0, 1, 2 ... n$ fra på begge sider i vores ligning, således følgende opnås:

$$\begin{aligned} A - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(10^{k-1} \cdot a_{k-1}\right) - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(10^{k-1} \cdot a_{k-1} - a_{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(10^{k-1} - 1\right) \cdot a_{k-1}\right). \end{aligned}$$

Da $10^j - 1$ for $j = 1, 2, 3 ... n$ giver et tal udelukkende bestående af 9-taller, (f.eks. 100-1 $=$ 99) kan vi omskrive $10^{k-1} - 1$ til $9 \sum_{j=0}^{k-1} 10^j$. Derved kan følgende udtryk fås:

$$A - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(9 a_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} 10^j\right).$$

Da 9 er en konstant, der er ganget på alle led, kan denne trækkes ud foran summen, hvorfor vi opnår:

$$A - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = 9 \sum_{k=1}^{n} \left(a_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} 10^j \right).$$

Vi antog i starten, at A er deleligt med 9, og det ses, at højresiden i ovenstående også er deleligt med 9. Dette fortæller os, at $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$ er et tal, der er deleligt med 9, hvilket lige præcis er tværsummen. ■

Sætning 1.2: Heltalsdivision med 3

Lad $A \in \mathbb{N}$ være delelig med 3. Da er tværsummen af A også delelig med 3.

Bevis

Beviset følger samme princip som med 9. Da $9 = 3 \cdot 3$ vil alle tilfælde, hvor tværsummen er delelig med 9 også medføre, at tværsummen er delelig med 3. Det omvendte er dog ikke altid tilfældet. ■

Disse sætninger er bekvemme måder at se, om noget kan divideres med 3 og 9. Eksempelvis kan vi betragte tallet 234, som har tværsummen $2 + 3 + 4 = 9$, hvilket både 3 og 9 går op i. Derfor er dette tal deleligt med både 3 og 9. Betragter vi i stedet tallet 231, så har dette tværsummen $2 + 3 + 1 = 6$, hvilket 9 ikke går op. Derimod går 3 op i 6, hvorfor 231 er deleligt med 3.