Notesæt - Eksempler på polær integration

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument forsøger blot at forklare,
hvordan grænser findes ved polær integrationsopgaver,
samt hvordan integralerne udregnes.

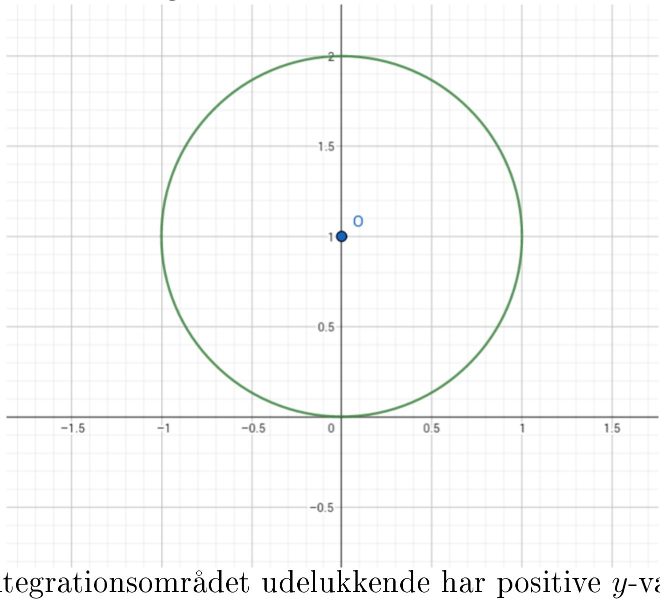
Indhold

Eksempel 1

Udregn volumen af legemet
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
afgrænset af området $r = 2\sin\theta$ (samt xy-planet).

Svar:

Vi har først brug for at finde ud af, hvad vores område strækker sig over. Vi husker de 3 vigtige relationer mellem kartesiske og polære koordinater:
$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$
Vi vil altså gerne kunne omskrive integrationsområdet med disse relationer. Integrationsområdet er beskrevet med ligningen
$$r = 2\sin\theta,$$
hvilken vi kan omskrive ved at gange med r på begge sider. - Det ser vi blandt andet ved, at højre side mangler et r, før den passer på y's definition. Tilsvarende med første relation og venstre side. Vi får:
$$r^2 = 2r\sin\theta.$$
Men af relationerne får vi lige nøjagtigt
$$x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0.$$
Vi kan omskrive ovenstående (brug kvadratsætninger) til følgende:
$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$
Dette er lige præcis cirklens ligning, der angiver en cirkel med centrum i punktet $(0, 1)$ med radius 1, hvilken er tegnet herunder.



Vi ser altså, at integrationsområdet udelukkende har positive y-værdier. Det vil sige, at vores θ kun må ligge mellem 0 og π, da dette er svarende til de positive y-værdier. Alt større end π og alt mindre end 0 vil medføre, at vi inkluderer negative y-værdier, og dermed inkluderer værdier uden for integrationsområdet.

Vi har altså fastlagt intervallet, som θ kan bevæge sige i. Desuden vides fra opgavens formulering, at r skal ligge mellem 0 og $\sin\theta$, da $r = \sin\theta$ afgrænser området. Følgende grænser kan altså opstilles:

$$0 \leq r \leq \sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Vender vi tilbage til funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, kan vi omskrive denne til polære koordinater ved at bruge første relation. Vi har $f(r, \theta) = r^2$. Vi kan nu opstille de polære integraler - husk at gange r på den nu polære funktion $f(r, \theta)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_0^{\sin\theta} f(r,\theta) \cdot r\, dr\, d\theta &= \int_0^\pi \int_0^{\sin\theta} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{\sin\theta} r^3\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^{\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{4}\sin^4\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta.
\end{aligned}$$

Vi anvender nu, at $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$, hvorfor

$$\sin^2\theta \cdot \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta)) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right).$$

Vi benytter hermed den trigonometriske identitet $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, hvorfor ovenstående altså kan omskrives til

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta \cdot \sin^2\theta &= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(1 + \cos(4\theta))\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\theta)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta)\right) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta).
\end{aligned}$$

Vi får altså følgende integral (som kan splittes op i flere indivudelle integraler):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{3}{8}\, d\theta - \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{1}{2}\cos(2\theta)\, d\theta + \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{1}{8}\cos(4\theta)\, d\theta \\
&= \frac{3}{32}\int_0^\pi 1\, d\theta - \frac{1}{8}\int_0^\pi \cos(2\theta)\, d\theta + \frac{1}{32}\int_0^\pi \cos(4\theta)\, d\theta
\end{aligned}$$

Første integral evalueres let, da dette blot er en konstant. Altså er $\frac{3}{32}\int_0^\pi 1\, d\theta = \frac{3\pi}{32}$.

De to næste integraler kræver integration ved substitution. - Dog vides det, at cos integreres til sin, og da $\sin 0 = \sin \pi = 0$, vil de indsatte grænser give 0. Normalt bør man benytte substitution for at vise dette (sæt $u = 2\theta$ og $v = 4\theta$), men da polær integration er målet med dette notesæt, vil jeg ikke bruge yderligere tid. Vi har altså, at svaret giver $\frac{3\pi}{32}$.

Eksempel 2

Lad xy-planet og funktionen $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ sammen definere et rummeligt legeme (det ligner lidt en flødebolle). Betragt afgrænsningen $r = 2$. Udregn volumen af legemet i det afgrænsede område.

Svar:

Vi har igen brug for at finde ud af, hvad området strækker sig over i kartesiske koordinater. Vi betragter

$$r = 2,$$

hvori det er oplagt at kvadrere begge sider (opløfte i anden):

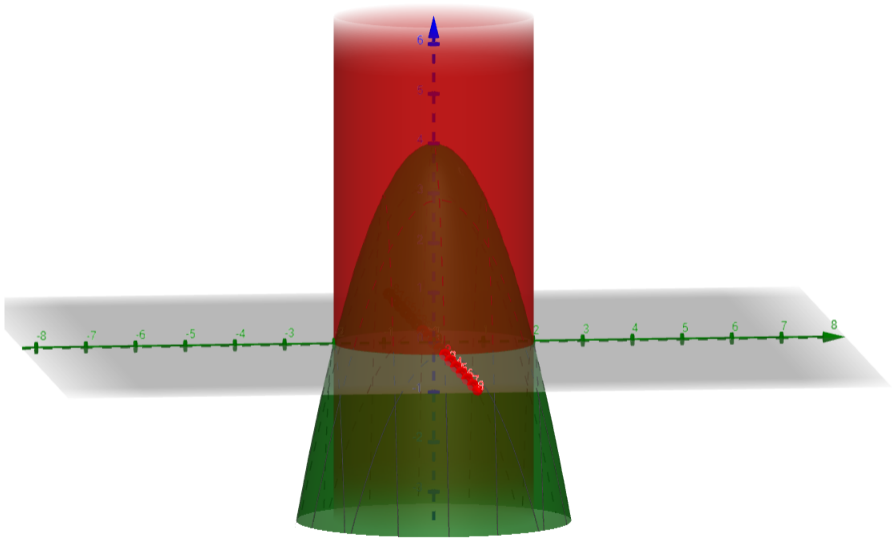
$$r^2 = 2^2 = 4.$$

Da vi kender ligheden $x^2 + y^2 = r^2$, har vi altså:

$$x^2 + y^2 = 4,$$

hvilket er cirklensligning for en cirkel med centrum i $(0, 0)$ med radius 2 (det giver også perfekt mening, når vi bare afgrænser med radius 2). Denne cirkel befinder sig i alle 4 kvadranter (både positive og negative værdier af både x og y), hvorfor θ løber fra 0 til 2π. Vi ved ydermere, at r er opadtil begrænset af 2 og nedadtil begrænset af 0.

Ligesom i Eksempel 1 kunne vi tegne en cirkel (blot placeret i centrum med radius 2). Men lad os i stedet se, hvad vores viden betyder i forhold til volumen. Nedenunder ses et plot af funktion $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, som er den grønne flade. Yderligere kan xy-planet ses som den grå flade. Slutteligt ses en rød cylinder. Denne er blot en 3-dimensionel visualisering af det område, vi integrerer over - nemlig cirklen blot strukket ud over hele z-aksen. Det vil sige, at vi kun finder volumen af det af den grønne flade, som ligger inden for den røde cylinder samt over xy-planet. Cylinderen i dette tilfælde er lige så bred, som $f(x, y)$ er i xy-planet, så afgrænsningen har ikke så meget at sige i dette tilfælde.



For at hoppe tilbage til integralet, så ved vi nu, at

$$0 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta\pi.$$

Ydermere kan funktionen $f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$, hvilket giver den polære funktion $f(r, \theta) = 4 - r^2$. Integralet bliver da (husk at gange den polære funktion med r):

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r - r^3 \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

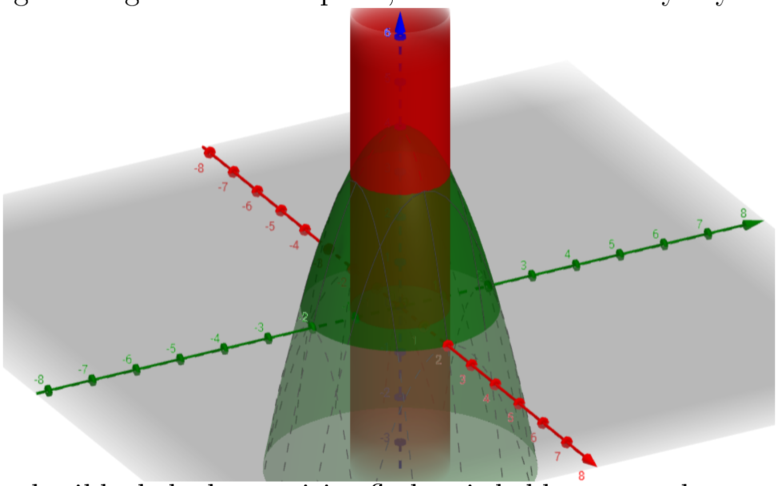
Eksempel 3

Lad os kigge på en anden version af Eksempel 2. I eksempel 2 afgrænsede $r = 2$ (cylinderen) ikke volumen af vores egentlige grønne flade. I hvert fald ikke noget, som funktionen f og xy-planen ikke allerede afgrænsede selv. Hvad hvis vi nu indskrænker radius?

Lad $f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$ (samme som før), altså er $f(r, \theta) = 4 - r^2$. Find volumen af legemet afgrænset af denne funktion, xy-planet samt $r = 1$. Eneste forskel fra eksempel 2 er, at vi nu kun betragter en cirkel med radius 1.

$$r = 1 \Leftarrow r^2 = 1^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Til sammenligning med figuren i Eksempel 2, ses herunder den nye cylinder:



Denne gang er det ikke hele den positive flade, vi skal betragte, da noget af denne falder uden for de x og y-værdier, vi betragter - det vil sige området afgrænset af cylinderen.

Da afgrænsningen er af samme form som før, er θ imellem 0 og 2π. Endelig er r imellem 0 og 1, som konstrueret. Vi har altså:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r - r^3 \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2 - \frac{1}{4} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{8}{4} - \frac{1}{4} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{7}{4} \, d\theta \\
&= \frac{7\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vi har altså fået skåret en god bid af vores oprindelige volumen af ved at afgrænse os til cirklen $r = 1$.