Æstetik og reduktioner

Matematisk takt og tone

Mikkel Findinge

Indhold

1 Indledning

Matematikere er dovne, men har samtidig respekt for andres dovenskab. De foretrækker æstetik, for matematik kan være svært[1], så man skal altså sørge for, at udtryk er så simple som mulige. Der er ingen grund til at gøre ligninger grimme og ulæselige for læseren.

Vær så doven, du kan, uden at forsømme noget, og respektér andres dovenskab.

Matematikere kan godt finde på at 'småskændes', når det kommer til god skik. Det behøver ikke engang være matematik. Hvordan man skal skrive programmeringskode, hvordan man bør formulere sig på tekst, eller hvor tæt en gasbrænder må være på en creme brulé - det er bare nogle ting, som matematikere har holdninger til. Så selvfølgelig har de stærke holdninger til deres eget fag. Selvom der er uenigheder blandt matematikere, hvad angår god skik, så er der alligevel nogle tilfælde, som de fleste er enige om. Det er disse, jeg vil tage hånd om heri.

1.1 Hvad er god matematisk skik?

God skik i matematik kan beskrives som 'maksimal æstetisk reduktion'. Her betyder 'maksimal reduktion', at man skal reducere brøker, så meget man kan, det vil sige, at vi ikke gider have $\frac{5}{10}$ men derimod $\frac{1}{2}$. Dette gælder også kvadratrødder, logaritmeudtryk og lignende tilfælde. Æstetik er højere rangeret end reduktion. Man kan f.eks. være udsat for, at der står $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det kan gode være, at det er den simpleste måde at skrive dette tal på. Men det er satme også en grim måde. Kvadratrødder i nævneren er matematikkens svar på sokker i sandalerne. Vi vil hellere have, at man skriver $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mere om dette senere.

[1] I dette notesæt beskriver jeg dog kun ret simple tilfælde med tal.

2 Starttips før ulvehyl

Før jeg går i gang med at snakke om de uskrevne regler, så vil jeg lige komme med nogle tips, som jeg selv benytter. Disse tips skulle gerne være brugbare, når man skal opfylde den matematiske skik.

2.1 Primtalsfaktorisering

En af de redskaber, man (måske ubevidst) bruger ved brøkreduktion, er primtalsfaktorisering, som betyder, at man skriver et tal ved at gange primtal sammen.

Eksempel 1 (Primtalsfaktorisering af 100)
Lad os kigge tallet 100 som eksempel. Vi tænker måske først, 'hmmmm, 100 er jo 10 gange 10'. Så det kan vi prøve at skrive:

$$100 = 10 \cdot 10.$$

Men vi kan gå videre. For 10 kan vi jo skrive som 2 gange 5, så vi får:

$$100 = 10 \cdot 10 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2).$$

Det gode ved, at alt er ganget sammen, er, at vi kan ophæve parenteserne og bytte rundt på faktorerne, som det passer os. Så vi kunne eventuelt skrive:

$$100 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Nu har vi primtalsfaktoriseret 100, da vi kun bruger primtallene 2 og 5 til at beskrive 100 med. Uanset hvordan vi startede med at angribe 100, så ville vi ende med den samme primtalsfaktorisering. Vi kunne f.eks. have gået følgende vej:

$$100 = 5 \cdot 20 = 5 \cdot (4 \cdot 5) = 5^2 \cdot 4 = 5^2 \cdot (2 \cdot 2) = 5^2 \cdot 2^2,$$

eller

$$100 = 4 \cdot 25 = (2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5^2.$$

Vi ser altså, at vi når frem til det samme resultat i sidste ende, selvom vi starter på forskellige måder. Så der er ingen grund til forvirring, hvis udgangspunktet I arbejder med ikke er ligesom mit.

Eksempel 2 (Primtalsfaktorisering af 215)
Lad os prøve et andet eksempel: 215. Vi kan se, at den slutter på et 5-tal, så 5 er en faktor. Hvad skal 5 ganges med? Jamen vi ved, at $5 \cdot 20 = 100$, så vi skal i hvert fald lige have 20 mere: $5 \cdot 40 = 200$. Vi mangler så kun 15, men det er jo $5 \cdot 3$. Vores første omskrivning er altså:

$$215 = 5 \cdot 43.$$

Dette er faktisk vores eneste omskrivning, da både 5 og 43 er primtal.

Eksempel 3 (Primtalsfaktorisering af 111)
Vi kigger nu på tallet 111. Hvis du ikke ved det, så kan jeg fortælle, at vi hurtigt kan se, at 3 er en primtalsfaktor for 111. Hvordan? Hvis vi tager tværsummen af 111, $1 + 1 + 1 = 3$, ses det, at dette tal er heltalsdivisibelt med 3.[1] Denne regel gælder dog kun for 3. Men så kan vi prøve at gange sammen. $3 \cdot 33 = 99$, vi mangler blot at redegøre for 12. Men da $12 = 3 \cdot 4$ har vi, at

$$111 = 99 + 12 = 3 \cdot 33 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot (3 + 44) = 3 \cdot 47.$$

Bemærk, at jeg blot tog 3 uden for en parentes, da tallet er ganget på både 33 og 4. Vi har nu nået primtalsfaktoriseringen af 111, da 3 og 47 er et primtal.

Eksempel 4 (Primtalsfaktorisering 224)
Lad os slutte med tallet 224. Da dette er et lige tal, så er 2 en del af primtalsfaktoriseringen. Dermed er

$$224 = 2 \cdot 112.$$

Vi ser, at 112 også er et lige tal, så vi bruger samme argument igen:

$$224 = 2 \cdot (2 \cdot 56) = 2^2 \cdot 56.$$

Igen er 56 et lige tal, så samme argument bruges her

$$224 = 2^2 \cdot 56 = 2^2 \cdot (2 \cdot 23) = 2^3 \cdot 23.$$

Da 2 og 23 begge er primtal, er vi i mål.

2.2 Potensregneregler

Når jeg skriver potensregneregler, så omfatter dette også omskrivninger af blandt andet brøker og kvadratrødder.

Regneregel 5 (Addition og subtraktion af potenser)
Betragt tallene $a, b, c \in \mathbb{R}$. Så gælder følgende relationer

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c,$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b},$$

og

$$a^0 = 1.$$

Lad os nu kigge på nogle eksempler, hvor vi anvender disse relationer.

Eksempel 6 (Addition af potenser)
Betragt 2^5, hvis vi umiddelbart ikke kan udregne denne, så kan vi bruge den første regneregel nævnt i ovenstående boks:

$$2^5 = 2^{2+2+1} = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32.$$

Eksempel 7 (Potenser og brøker)
Vi kigger på produktet af 2^5 og $\frac{1}{8}$.

$$2^5 \cdot \frac{1}{8} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2^{2+3}}{2^3} = \frac{2^3 \cdot 2^2}{2^3} = 2^2 = 4.$$

En anden måde at lave udregningen på kan være at omskrive brøken i stedet:

$$2^5 \cdot \frac{1}{8} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4.$$

Eksempel 8 (Hvad med π?)
Lad os gange π^{100} og $\pi^{-50} \cdot \pi^{-49}$

$$\pi^{100} \cdot \pi^{-50} \cdot^{-49} = \pi^{100-50-49} = \pi^{100-99} = \pi^1 = \pi.$$

Regneregel 9 (Brøker som potenser)
Vi kigger igen på tallene $a, b, c \in \mathbb{R}$. Der gælder relationerne

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b} = \sqrt[c]{a}^b,$$

$$a^{b \cdot c} = \left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b$$

Bemærk, at a ikke må være negativ i den første regel, hvis c er et lige tal. Hvis $c = 2$, så svarer dette til kvadratroden, når vi ser på første regel. Endvidere svarer $c = 3$ til kubikroden osv.

Vi skal huske på, at a IKKE må være negativ, når vi skal bytte rundt på rødder og potenser, f.eks. eksisterer $\sqrt{-2}$ ikke. Dermed er $2 = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} \neq \sqrt{-2}^2 =$ (udefineret)^2. Så længe, du arbejder med tal større end 0, så går det nok. Vi kigger igen på nogle eksempler, hvor vi anvender de her regler.

Eksempel 10 (Tilbage til π!)
Lad os kigge på π^{100} og $(\pi^{-2})^{50}$:

$$\pi^{100} \cdot \left(\pi^{-2}\right)^{50} = \pi^{100} \cdot \pi^{-2 \cdot 50} = \pi^{100} \cdot \pi^{-100} = \pi^{100-100} = \pi^0 = 1.$$

Eksempel 11 (Kvadratroden af π?)
Vi kigger nu i stedet på $\sqrt{\pi^{200}}$. Husk, at $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$:

$$\sqrt{\pi^{200}} = \left(\pi^{200}\right)^{\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2} \cdot 200} = \pi^{\frac{200}{2}} = \pi^{100}.$$

Tilsvarende kan vi kigge på den 200. rod af π^{200}, $\sqrt[200]{\pi^{200}}$:

$$\sqrt[200]{\pi^{200}} = \left(\pi^{200}\right)^{\frac{1}{200}} = \pi^{\frac{1}{200} \cdot 200} = \pi^{\frac{200}{200}} = \pi^1 = \pi.$$

Eksempel 12 (Jeg skal give jer 3-taller.)
Lad os kigge på 3^3 og kubikroden af denne:

$$\sqrt[3]{3^3} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3.$$

Hvad med kubikroden af 3 og så opløftet denne i tredje?

$$\sqrt[3]{3}^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3.$$

Så vi kan altså bare bytte rundt rækkefølgen af potenser er rødder, som det passer os, da det giver det samme i sidste ende. - Selvfølgelig så længe I ikke prøver at tage kvadratroden af noget negativt for de reelle tal.

Jeg slutter lige af med to regler, som egentligt er et specialtilfælde af de andre regler, men hvis du læser denne 'guide', så gider du nok ikke tænke så meget (på beviser).

Regneregel 13 (Brøkregler)
Betragt tallene a, b og c. En tidligere regneregel fra boks nummer 5 kan generaliseres på følgende måde:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

Nedenstående regel er også en god huskeregel:

$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{c \cdot b}{a}.$$

Eksempel 14 (Et lille eksempel)
Betragt

$$\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Vi kunne også udregne nævneren først og så ikke bruge den

$$\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{-1}} = \left(2^{-1}\right)^{-1} = 2^{-1\cdot(-1)} = 2^1 = 2.$$

Vi får altså det samme.

3 Æstetik og reduktioner

Vi skal nu i gang med at bruge nogle af de indledende fifs, så vi kan få skrevet svarene som, vores matematiske læsere vil have dem.

3.1 Reduktion af kvadratrødder

Lad os kigge på kvadratrødder. Oftest støder man på, at man skriver et eller andet tal i en kvadratrod som facit, og så lader det umiddelbart til, at facitlisten får noget helt andet. De vigtigste regler at huske på i forhold til kvadratrødder er

$$\sqrt{a^2} = |a|, \qquad \text{og} \qquad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Hvad skal vi reducere ved kvadratrødder? Jamen hvis du ser et tal som $\sqrt{27}$, så er dette forfærdeligt at se på, vi vil hellere have $3\sqrt{3}$.[1] Hvorfor? Jamen fordi hvis vi nu var udsat for, at $\sqrt{27}$ skulle divideres med tre, så kunne vi principielt ikke komme videre. Når vi så ved, at $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, så ved vi også, at $\frac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3}$.

Lad os begynde på eksemplerne. Jeg bruger (primtals)faktorisering i alle disse, så kig eventuelt på det afsnit, hvis du ikke allerede kan finde ud af det.

Eksempel 15 (Hvorfor er $\sqrt{27}$ som ovenfor?)

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Bemærk, at de faktorer, der har en lige eksponent skilder sig af med kvadratoden. De tal, der ikke har en lige eksponent bliver altså 'fanget' i kvadratroden.

Eksempel 16 ($\sqrt{99}$)

$$\sqrt{99} = \sqrt{9 \cdot 11} = \sqrt{9}\sqrt{11} = \sqrt{3^2}\sqrt{11} = 3\sqrt{11}.$$

[1] Der står 3 ganget med kvadratroden af 3.

Eksempel 17 ($\sqrt{400}$)

$$\sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100} = \sqrt{4}\sqrt{100} = \sqrt{2^2}\sqrt{10^2} = 2 \cdot 10 = 20.$$

Bemærk, at vi egentligt bare er tilfredse med at have en lige eksponent, uden det er et primtal, som er grundtal. Vi kunne sagtens have splittet 10 op i sine primtalsfaktorer, men det er bare unødigt arbejde. Vi kunne også have lavet opsplitningen:

$$\sqrt{400} = \sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16}\sqrt{25} = \sqrt{4^2}\sqrt{5^2} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Det giver det samme i sidste ende. Vi skal altså blot lede efter lige eksponenter.

Eksempel 18 ($\sqrt{81}$)
Bruges primtalsfaktorisering:

$$\sqrt{81} = \sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9.$$

Benyttes viden om tallet

$$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9.$$

Primtalsfaktoriseringen er langsom men sikker.

Eksempel 19 ($\sqrt{17325}$)
Her vil primtalsfaktorisering helt sikkert være handy, hvis vi skal finde ud af, hvilke tal det her består af:

$$17325 = 5 \cdot 3465 = 5^2 \cdot 693 = 3 \cdot 5^2 \cdot 231 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 77 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Det er let at sortere et 5-tal fra, da der indgår enten 0 eller 5 som sidste ciffer i et tal, der er heltalsdivisibelt med 5. Husk desuden reglen med, at en tværsum divisibel med 3 er et tal divisibel med 3. Vi har nu:

$$\sqrt{17325} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} = \sqrt{3^2}\sqrt{5^2}\sqrt{7 \cdot 11} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{77} = 15\sqrt{77}.$$

Bemærk, at siden vi ikke kan reducere $\sqrt{7}$ eller $\sqrt{11}$ yderligere, så slår vi dem sammen. Altså er den æstetisk-reducerede måde at skrive $\sqrt{17325}$ på lig med $15\sqrt{77}$.

3.2 Æstetisk reduktion af brøker

I dette afsnit fokuserer vi ikke kun på reduktion af brøker. Vi vender nemlig tilbage til tilfældet $\frac{1}{\sqrt{2}}$, som BØR skrives $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Som jeg skrev tidligere: Kvadratrødder i nævneren er matematikkens svar på sokker i sandalerne. Lad os kigge på, hvordan vi omskriver dem:

Eksempel 20 ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)
Lad os kigge på $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Prøv at forlænge brøken med $\sqrt{2}$ (dvs. vi ganger med dette i tæller og nævner):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Som i ovenstående eksempel forholder det sig faktisk sådan med alle forskellige tilfældene:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20}, \quad \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{100}}{100}, \quad \frac{1}{\sqrt{1234567890}} = \frac{\sqrt{1234567890}}{1234567890}.$$

Vi kan ikke rigtigt reducere $\frac{\sqrt{10}}{10}$ yderligere. Men de kan vi faktisk i de 3 andre tilfælde, selvom sidstnævnte måske ikke er så forfærdelig rar at tage hul på i hånden. Det kan faktisk være en idé at vente med omskrivningen til vi har reduceret brøkerne.

Eksempel 21 ($\frac{1}{\sqrt{20}}$)

$$\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Det er nu, vi omskriver $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ i stedet. Vi ganger blot med $\sqrt{5}$ i både tæller og nævner, da dette er kvadratroden, der skal fjernes fra nævneren:

$$\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Det følger altså samme princip som før.

Eksempel 22 ($\frac{1}{\sqrt{100}}$)
Den her er meget nem, da vi allerede ved, at $\sqrt{100} = 10$:

$$\frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}.$$

Havde vi taget den anden rute, så ville de tage lidt længere tid:

$$\frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{100}}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10}.$$

Jeg synes altså, at man bør vente med at få kvadratroden i tælleren, til man er sikker på, at kvadratroden i sig selv er skrevet på den 'æstetisk-reducerede' form.

3.3 Reduktion af logaritme-udtryk

Vi kigger nu på logaritme-udtryk. Hvis du ikke allerede har tjekket afsnittet ud med potens-regneregler (eller kan dem i forvejen), så er det nok en god idé at få læst det.

Regneregel 23 (Logaritme regneregler (den naturlige))
Lad a og b være reelle tal. Bemærk, at jeg bruger log som den naturlige logaritme, dvs $\log = \ln$. Da gælder:

$$\begin{aligned}
\log(a \cdot b) &= \log(a) + \log(b), \quad \text{for } a, b > 0 \\
\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log(a) - \log(b), \quad \text{for } a, b > 0 \\
\log(a^b) &= b\log(a), \quad \text{for } a > 0, \\
\log(e) &= 1, \\
\log(1) &= 0.
\end{aligned}$$

Vi kan nu gå i gang med omskrivningerne.

Eksempel 24 (Simple multiplikation og brøker)
Vi bruger regnereglerne til at reducere udtrykkene. Først multiplikation:

$$\log(2 \cdot 2) = \log(2) + \log(2) = 2\log(2).$$

Så division:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(1) - \log(2) = 0 - \log(2) = -\log(2).$$

Bemærk, at multiplikationen kun er lavet som eksempel. Normalvis ville man formentlig bruge potensregnereglen der.

Eksempel 25 ($\log(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)$)
Lad os prøve at reducere dette udtryk på 2 forskellige måder. Først er der

$$\log(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5) = \log(5) + \log(5) + \log(5) + \log(5) = 4\log(5).$$

Alternativt, og den måde, jeg synes, er bedst, kan man sige:

$$\log(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5) = \log(5^4) = 4\log(5).$$

Eksempel 26 ($\log(e\cdot e\cdot e\cdot \sqrt{e})$)
Nu er det vigtigt, at du kan dine potensregneregler.

$$\log(e\cdot e\cdot e\cdot \sqrt{e}) = \log\left(e^3\cdot e^{\frac{1}{2}}\right) = \log\left(e^{3+\frac{1}{2}}\right) = \log(e^{\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}) = \log\left(e^{\frac{7}{2}}\right) = \frac{7}{2}\log(e) = \frac{7}{2}.$$

Så først samles de tre e'er, og kvadratroden omskrives til en potens. Dernæst lægges potenserne sammen i de næste 3 udtryk. Derefter 'lokker' vi potensen ned foran log-funktionen. Slutteligt omskrives logaritmen af e til 1.

Eksempel 27 ($\log(8e^3)$)
Kan vi omskrive denne laban til noget mere lækkert? Ja da!

$$\log(8e^3) = \log(8) + \log(e^3) = \log(2^3) + 3\log(e) = 3\log(2) + 3\cdot 1 = 3(\log(2) + 1).$$

Alternativt kunne man skrive

$$\log(8e^3) = \log(2^3e^3) = \log((2e)^3) = 3\log(2e) = 3(\log(2) + \log(e)) = 3(\log(2) + 1).$$

Bemærk, der er intet galt i f.eks. at slutte med resultatet $3 + 3\log(2)$, jeg kan bare godt lide at have tal uden for en parentes, hvis det passer med det, der står indeni.

Nu burde du have fået nok eksempler til at kunne klare dig selv. Det håber jeg i hvert fald. Ellers må du skrive.

4 Vektorer og matricer

I forhold til vektorer og matricer kan æstetitik faktisk spille en stor rolle i forhold til 'omfanget' af en udregning. Lad os kigge på nogle eksempler.

Eksempel 28 (Skalarprodukter)
Lad os kigge på vektorerne $\begin{bmatrix} 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}^\top$ og $\begin{bmatrix} -4 & 20 & 4 \end{bmatrix}^\top$. Skal vi finde skalaproduktet af disse, får vi:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-4) + 16 \cdot 20 + 8 \cdot 4 = -16 + 320 + 32 = 336.$$

Tallene i dette tilfælde er ligetil, så det gør ikke det store, men vi kan lave en omskrivning for at gøre det mere 'behageligt' for os selv. Vi ser, at vi faktisk kan tage 4 uden for begge vektorerne. Det vil sige:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -4 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Husk, man kan bevæge skalarer rundt, som det passer en, når man ganger dem. Det vil sige:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} &= 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 16\,(1 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1) = 16 \cdot (-1 + 20 + 2) = 16 \cdot 21 = 336 \end{aligned}$$

Ja, den sidste multiplikation er måske ikke helt lige så let, som det andet var, men så se næste eksempel.

Eksempel 29 (Skalarprodukt)
Lad os nu kigge på vektorerne

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{3}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Vi bider mærke i, at der står divideret med $\sqrt{2}$, da det er grimt. MEN vi omskriver det ikke med det samme. Lad os i stedet tage denne faktor ud foran vektorerne:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{3}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lad os nu prøve at udregne prikproduktet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{3}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}^2}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = \frac{1}{3 \cdot 2}(1 + 2 + 9) = \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{12}{6} = 2. \end{aligned}$$

Læg mærke til, hvordan vi slipper for at skrive en hulens masse kvadratrødder, fordi vi bare smider det grimme tegn ud foran, da det går igen.

Endnu et tidspunkt, hvor det er handy at sætte et eventuelt tal uden for en vektor er i forbindelse med længder af vektorerne.

Eksempel 30 (Længder af vektorer)
Vi kigger nu på vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Længden af $\mathbf{v}$ er:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4^2 + 16^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 256 + 64} = \sqrt{336} = \sqrt{16 \cdot 21} = \sqrt{16}\sqrt{21} = 4\sqrt{21}.$$

Men vi ved, at

$$\mathbf{u} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan faktisk udregne længden af den angivne vektor og gange 4 på bagefter. Det vil altså sige:

$$\|\mathbf{u}\| = 4\sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = 4\sqrt{1 + 16 + 4} = 4\sqrt{21}.$$

Dette var en meget mere behagelig måde, at gøre tingene på.

Eksempel 31 (Længder af vektorer)
Vi kigger nu på to andre vektorer:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Vi kan omskrive begge disse vektorer:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lad os nu udregne længden af $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{1+1+3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Vi ser, at $\mathbf{v}$ er en enhedsvektor, da den har længde 1. Vi kigger nu på $\mathbf{w}$:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{6}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}\sqrt{6} = \sqrt{6}^2 = 6.$$

Vi ser altså meget nemt, at $\mathbf{w}$ har længden 6.

Samme teknik er mulig at bruge for matricer. Vi skal dog være opmærksom på, at det er ALLE indgange i matricen, der påvirkes, når vi tager en konstant ud. Vi tager jo ikke rigtigt længden af en matrix, så hvad kan det bruges til? Jo, det kan måske hjælpe med at gøre multiplikationer lettere.

Eksempel 32 (Rotationsmatricer)
Betragt en rotationsmatrix, som roterer vektorer med 45 grader.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Her går $\frac{\sqrt{2}}{2}$ igen i alle indgange, så vi kan hive denne snøvs ud af matricen:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Så hvis vi har en vektor, vi vil rotere, f.eks.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kan vi blot gange den på ovenstående matrix og slutte af med at gange $\frac{\sqrt{2}}{2}$ på til sidst:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan så gange brøken ind, hvis man gider. Dette kan være meget fint, hvis der er kvadratrødder, som alle er ens. Dermed kan man slippe for at skrive dem alle og blot nøjes med 1.

5 De n dødssynder

I dette kapitel kigger vi kort på, hvad studerende nogle gange gør, som er så forkert, at det burde resultere i en billet til helvede. Eller måske ikke så galt, I er jo søde mennesker det meste af tiden, men fejlene skal altså fikses! Jeg har valgt at kalde afsnittet 'De n dødssynder', da jeg ikke vil sætte tal på antallet af disse dummefejl. Hvis du synes noget mangler, så kontakt mig gerne.

5.1 Plus mellem brøker

De fleste ved godt, at brøker skal have fælles nævner, før vi kan lægge tællerne sammen, så hvorfor laver I stadig dumme ting. Lad os kigge på to eksempler:

$$\frac{5}{2}+\frac{11}{7}=\frac{5+11}{2+7}=\frac{16}{9} \qquad \div\text{FORKERT}$$

$$\frac{5}{2}+\frac{11}{7}=\frac{5\cdot 7}{2\cdot 7}+\frac{11\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{35}{14}+\frac{22}{14}=\frac{35+22}{14}=\frac{57}{14} \qquad \checkmark\text{RIGTIGT}$$

Husk det nu. Forlæng brøkerne, så de ender med samme nævner.

5.2 Plus mellem kvadratrødder

Som om plus mellem brøker, hvor nævnerne ikke passer, ikke er fjollet nok, så er der dælme også nogle, der prøver at splitte kvadratrødder op med plus. Lad os kigger på to eksempler igen:

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7 \qquad \div\text{FORKERT}$$

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \qquad \checkmark\text{RIGTIGT}$$

Lad være med at være fjollet. Du må kun splitte kvadratrødder op, når et tal er ganget på, og i det tilfælde skal kvadratrødder også ganges på hinanden.

5.3 Kvadratet af en parentes

Studerende bliver ved med at fucke up i flere tilfælde med denne. Lad være med det. Den ene er, at de glemmer, at en potens påvirker alt i en parentes:

$$(5x)^2=5x^2 \qquad \div\text{FORKERT}$$

$$(5x)^2=25x^2 \qquad \checkmark\text{RIGTIGT}$$

Husk det nu. Parenteser spiller en vigtig rolle i matematik, derfor er det altid vigtigt at huske dem. F.eks. i dette tilfælde, som fucker med mange studerende:

$$-3^2=9 \qquad \div\text{FORKERT}$$

$$-3^2=-9 \qquad \checkmark\text{RIGTIGT}$$

$$(-3)^2=-9 \qquad \div\text{FORKERT}$$

$$(-3)^2=9 \qquad \checkmark\text{RIGTIGT}$$

Det er altså meget vigtigt, at I husker at bruge parenteserne, ellers kan man ende med et helt andet resultat i sidste ende. Vi snakker liv eller død her.

5.4 Gange ind i parentesen

Nu bliver du vel lidt kålhøgen, men der er folk, der ikke kan finde ud af dette.

$$10(5x+2) = 50x+2 \quad \div\text{FORKERT}$$
$$10(5x+2) = 50x+20 \quad \checkmark\text{RIGTIGT}$$

Husk, at det, der er ganget på en parentes, påvirker ALLE LED inden i parentesen. Ikke kun det første led.

5.5 Faktorudligning i brøker

Om jeg begriber, at jeg bliver nødt til at sige det her, men der er mange, der laver den her skodfejl. Hvis du har noget stående i nævneren, så skal alle led i tælleren divideres med dette:

$$\frac{3x^3+x}{x} = 3x^2+x \qquad \div\text{FORKERT}$$
$$\frac{3x^3+x}{x} = 3x^3+1 \qquad \div\text{FORKERT}$$
$$\frac{3x^3+x}{x} = \frac{x(3x^2+1)}{x} = 3x^2+1 \quad \checkmark\text{RIGTIGT}$$